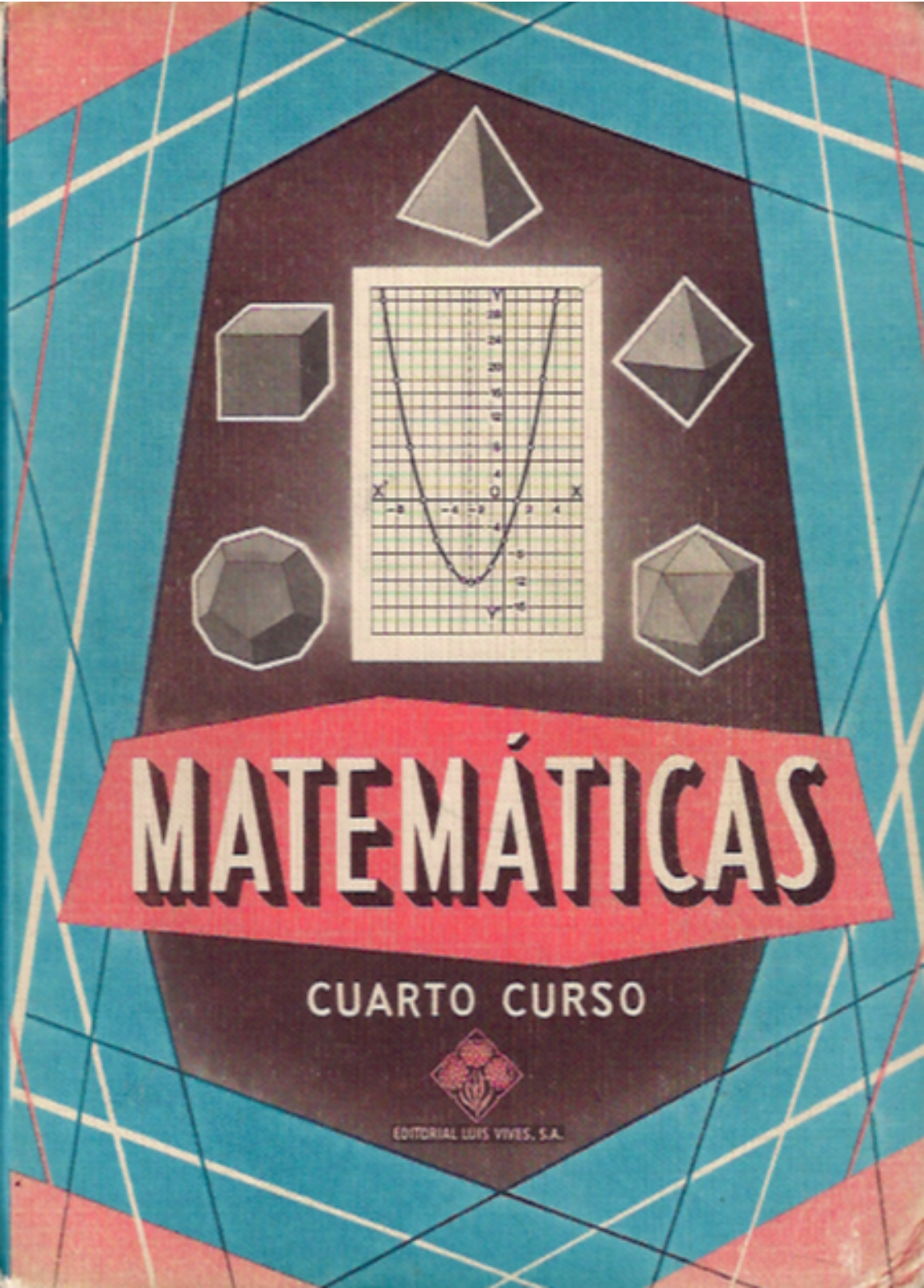

MATEMÁTICAS
CUARTO CURSO
EDITORIAL LUIS VIVES, S.A.

8 €
026441

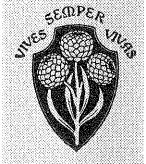
matemáticas

cuarto curso

por

Edelvives

Aprobado por O. M. del 18-VI-1965
«B. O. M. de E. N.», núm. 51 del 28-VI-1965
Año de publicación: 1965. — Precio: 60 pesetas



EDITORIAL LUIS VIVES, S.A. - ZARAGOZA

© *Editorial Luis Vives, S.A, Zaragoza 1965*

N.° Registro: 1.208 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 287 - 60 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, S.A., P.° Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

ÁLGEBRA

1. Operaciones racionales con expresiones enteras

1. Revisión de las operaciones enteras con monomios y polinomios. — Recordaremos del curso anterior las siguientes reglas:

Para SUMAR *monomios y polinomios se ponen unos a continuación de otros, conservando cada término su propio signo, y se reducen los términos semejantes.*

EJEMPLO:

$$(4x^3+3ax^2-3xy^2)+(-3x^3+4xy^2)+(-4ax^2+5xy^2)+(2x^3+2ax^2-4xy^2)=$$
$$=4x^3+3ax^2-3xy^2-3x^3+4xy^2-4ax^2+5xy^2+2x^3+2ax^2-4xy^2=$$
$$=3x^3+ax^2+2xy^2$$

Tratándose de polinomios, la operación se facilita disponiendo los sumandos unos debajo de otros, de modo que los términos semejantes se correspondan. Es decir, pondremos:

$$\begin{array}{r} 4x^3+3ax^2-3xy^2 \\ -3x^3\qquad\quad +4xy^2 \\ \qquad -4ax^2+5xy^2 \\ 2x^3+2ax^2-4xy^2 \\ \hline 3x^3+\quad ax^2+2xy^2 \end{array}$$

El polinomio reducido escrito debajo de la línea horizontal es la suma buscada.

Para RESTAR *monomios y polinomios se escribe el minuendo y a continuación el sustraendo con los signos de todos sus términos cambiados, y se reducen los términos semejantes.*

EJEMPLO:

$$(5x^2+2axy-6y^2+3)-(4x^2+3axy+8y^2-5)=$$
$$=5x^2+2axy-6y^2+3-4x^2-3axy-8y^2+5=x^2-axy-14y^2+8$$

En la práctica escribiremos el polinomio minuendo y debajo el sustraendo con los signos de todos sus términos cambiados, de manera que se correspondan los términos semejantes. Bastará luego sumar los polinomios así escritos:

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 2axy - 6y^2 + 3 \\ -4x^2 - 3axy - 8y^2 + 5 \\ \hline x^2 - axy - 14y^2 + 8 \end{array}$$

El polinomio escrito debajo de la línea horizontal representa la diferencia pedida. En efecto: sumándola con el sustraendo da el minuendo.

Para* MULTIPLICAR *polinomios se multiplica cada monomio del multiplicando por cada monomio del multiplicador, teniendo en cuenta los signos de los monomios, y luego se halla la suma de los productos obtenidos.

EJEMPLO. — Efectuar el producto

$$(2xy^3 + 3x^3y + 2x^4 - y^4)(3x^3 - 2xy^2 + y^3)$$

En la práctica ordenaremos los polinomios con relación a las potencias decrecientes (o crecientes) de la misma letra y dispondremos la operación como sigue:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3y + 2xy^3 - y^4 \\ 3x^3 - 2xy^2 + y^3 \\ \hline 6x^7 + 9x^6y \quad + 6x^4y^3 - 3x^3y^4 \\ - 4x^5y^2 - 6x^4y^3 \quad - 4x^2y^5 + 2xy^6 \\ 2x^4y^3 + 3x^3y^4 \quad + 2xy^6 - y^7 \\ \hline 6x^7 + 9x^6y - 4x^5y^2 + 2x^4y^3 \quad - 4x^2y^5 + 4xy^6 - y^7 \end{array}$$

2. División de dos polinomios. — **Esta operación se realiza siguiendo el mismo procedimiento que si se tratase de una división entre números enteros.**

Supongamos, por ejemplo, que queremos efectuar la división del polinomio

$7x^3 + 16x^2y - xy^2 - 10y^3$ **por el polinomio** $x^2 + 3xy + y^2$

ambos ordenados con respecto a las potencias decrecientes de x.

Se divide el primer término del dividendo, $7x^3$, **por el primero del divisor,** x^2. **El resultado,** $7x$, **se multiplica por todos los términos del divisor. Los términos de este producto se escriben debajo de los tér-**

minos semejantes del dividendo, pero como al restar hay que cambiar de signo al sustraendo, pondremos:

$$\begin{array}{r|l} 7x^3 + 16x^2y - xy^2 - 10y^3 & x^2 + 3xy + y^2 \\ -7x^3 - 21x^2y - 7xy^2 & \hline 7x \\ \hline 0 - 5x^2y - 8xy^2 - 10y^3 & \end{array}$$

El resto obtenido, $-5x^2y - 8xy - 10y^3$, forma un dividendo nuevo, y volvemos a dividir como antes. O sea, diremos: $-5x^2y$ entre x^2, a $-5y$. Este resultado será el segundo término del cociente, el cual se multiplicará por todo el divisor; y el producto obtenido, $-5x^2y - 15xy^2 - 5y^3$, se restará del resto anterior. Es decir, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 7x^3 + 16x^2y - xy^2 - 10y^3 & x^2 + 3xy + y^2 \\ -7x^3 - 21x^2y - xy^2 & \hline 7x - 5y \\ \hline - 5x^2y - 8xy^2 - 10y^3 & \\ + 5x^2y + 15xy^2 + 5y^3 & \\ \hline 7xy^2 - 5y^3 & \end{array}$$

La operación se sigue hasta llegar a un resto de grado inferior al grado del divisor, respecto de la letra ordenatriz. Dicho resto, si existe, será el resto de la división entera. En la división propuesta el cociente es $7x - 5y$ y el resto $7xy^2 - 5y^3$.

3. OBSERVACIONES: 1.ª *El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y el divisor.*

2.ª *Si el dividendo y el divisor son homogéneos, el cociente también lo será.*

3.ª *Cuando el polinomio dividendo es incompleto, deberá completarse poniendo términos de coeficiente cero, o dejar los claros en las potencias de la letra ordenatriz que falten, con el fin de dejar sitio a los términos que resulten después en las sucesivas multiplicaciones.*

EJEMPLO. — Sea dividir $3x^4 + 4x^2 - 5x + 3$ por $x^2 - 2x + 3$. Podemos disponer así la operación:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 5x + 3 & x^2 - 2x + 3 \\ -3x^4 + 6x^3 - 9x^2 & \hline 3x^2 + 6x + 7 \\ \hline + 6x^3 - 5x^2 - 5x + 3 & \\ - 6x^3 + 12x^2 - 18x & \\ \hline + 7x^2 - 23x + 3 & \\ - 7x^2 + 14x - 21 & \\ \hline - 9x - 18 & \end{array}$$

4.ª *En la práctica no suelen escribirse después de cada resto parcial todos los términos sobrantes del dividendo, si bien mentalmente se consideran los polinomios totales.*

5.ª *Si los coeficientes de los polinomios que se dividen tienen forma fraccionaria, se seguirá el mismo procedimiento que cuando son enteros.*

4. División de un polinomio en x por $x - a$. — Se llama *polinomio en x* al que no tiene más que la letra ordenatriz x; las demás letras, si las hay, desempeñan sólo el papel de coeficientes.

Supongamos que se trata de dividir por $x - a$ un polinomio de cuarto grado, como

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

Lo mismo a que los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, representan números cualesquiera.

Efectuemos primero la división en la forma ordinaria.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
a_0x^4 + & a_1x^3 + & a_2x^2 + & a_3x + & a_4 & x - a \\
-b_0x^4 + & b_0a\,x^3 & & & & \hline
 & b_1x^3 + & a_2x^2 & & & b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 \\
 & -b_1x^3 + & b_1a\,x^2 & & & \\
 \hline
 & & b_2x^2 + & a_3x & & \\
 & & -b_2x^2 + & b_2a\,x & & \\
 \hline
 & & & b_3x + & a_4 & \\
 & & & -b_3x + & b_3a & \\
 \hline
 & & & & R &
\end{array}$$

Fácilmente se deduce que los coeficientes del cociente y el resto de la división estarán relacionados con los coeficientes del dividendo por las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{l|l}
b_0 = a_0 & b_2 = a_2 + b_1a \\
b_1 = a_1 + b_0a & b_3 = a_3 + b_2a
\end{array}$$
$$R = a_4 + b_3a$$

5. Regla de Ruffini. — Interpretando las igualdades recogidas de la división precedente, tenemos la llamada *regla de Ruffini* (*), que puede enunciarse así:

Al dividir un polinomio entero en x *por el binomio* x − a:

1) *El cociente es de grado inferior en una unidad al del dividendo, y el resto, de grado cero.*
2) *El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo.*
3) *Los demás se obtienen multiplicando el coeficiente del término anterior por* a *y añadiendo este producto al coeficiente del término que ocupe el mismo lugar en el dividendo.*
4) *El resto es igual al último coeficiente del dividendo, más el producto del último coeficiente del cociente por* a.
5) *El exponente del primer término del cociente es inferior en una unidad al del primer término del dividendo, y los exponentes de los restantes términos van decreciendo ordenadamente de unidad en unidad.*
6) *Si el divisor fuera* x + a, *se le transformará en* x − (−a), *y entonces habrá que multiplicar por* −a *para obtener los coeficientes del cociente.*

De acuerdo con esta regla, resulta fácil hallar el cociente de un polinomio en x por el binomio $x - a$. Véanse los dos ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1.º — Efectuar la división

$$(3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$$

Dispondremos así la operación:

$a \rightarrow +2$	3	−2	+1	− 5	+ 1	← coef.ˢ del dividendo
		+6	+8	+18	+26	← productos por a
coef.ˢ del cociente →	3	+4	+9	+13	+27	← resto

Cociente: $3x^3 + 4x^2 + 9x + 13$; resto: 27

ADVERTENCIA IMPORTANTE. — Cuando el dividendo sea un polinomio incompleto, se completará suponiendo que los términos que le faltan tienen coeficiente cero.

(*) RUFFINI, matemático italiano del siglo XVIII.

EJEMPLO 2.º — Efectuar la división $(7x^4-29x^2-306):(x+3)$

Sustituyendo $x+3$ por $x-(-3)$ y completando el polinomio dividendo, tendremos:

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 7 & +0 & -29 & +0 & -306 \\ & & -21 & +63 & -102 & +306 \\ \hline & 7 & -21 & +34 & -102 & 0 \end{array}$$

Cociente exacto: $7x^3-21x^2+34x-102$

Este procedimiento, como se ve, es más rápido que el ordinario, y nos será de mucha utilidad para descomponer en factores ciertas expresiones algebraicas.

6. Cálculo directo del resto en la división por $x-a$: valor numérico de un polinomio. — En una división de Ruffini es fácil calcular el resto sin necesidad de hallar el cociente, lo que nos será muy útil para determinar si la división es exacta o no.

Como el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, llamando Q al cociente y R al resto, tendremos:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x-a)Q+R$$

y dando a x el valor a del divisor, resulta:

$$a_0a^4+a_1a^3+a_2a^2+a_3a+a_4=\underbrace{(a-a)Q}_{\text{cero}}+R$$

Luego,

$$R=a_0a^4+a_1a^3+a_2a^2+a_3a+a_4$$

Es decir, que

El resto en la división por x − a *es igual al valor numérico del dividendo, cuando se da a* x *el valor* a *del segundo término del divisor, cambiado de signo.*

EJEMPLO. — Para calcular el resto de la división

$$(5x^3-14x^2-10):(x-3)$$

bastará hallar el valor numérico del dividendo para $x=+3$. Es decir:

$$R=5\times3^3-14\times3^2-10=-1$$

Si enunciamos la propiedad anterior en sentido inverso, tendremos:

El valor numérico de un polinomio en x, *para* x = a, *es igual al resto de la división de dicho polinomio por el binomio* x − a.

EJEMPLO 1.º — Hallar el valor numérico, para $x = 2$, del polinomio

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 15x^2 + 7$$

El problema se resolverá efectuando la división abreviada por $x - 2$. El resto será el valor numérico pedido.

$$\begin{array}{c|cccccc} +2 & 1 & -6 & +2 & +15 & +0 & +7 \\ & & +2 & -8 & -12 & +6 & +12 \\ \hline & 1 & -4 & -6 & +3 & +6 & +19 \end{array}$$

Luego, $P(2) = 19$.

EJEMPLO 2.º — Hallar el valor numérico del polinomio

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 4 \quad \text{para} \quad x = -3$$

Dividiendo por $x - (-3) = x + 3$, resulta:

$$\begin{array}{c|ccc} -3 & 1 & -1 & -1 & +4 \\ & & -3 & +12 & -33 \\ \hline & 1 & -4 & +11 & -29 \end{array}$$

Luego, $P(-3) = -29$.

7. Condición de divisibilidad por $x - a$.— Como consecuencia de lo dicho en el número anterior, podemos afirmar:

La condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero en x *sea divisible por* x − a, *es que se anule al dar a* x *el valor* a.

EJEMPLO 1.º — ¿Es divisible el polinomio $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$, por $x - 1$?

Por ser $3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$

diremos que el polinomio propuesto es divisible por $x - 1$.

EJEMPLO 2.º — Probar, sin efectuar la división, que el polinomio

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 14$$

es divisible por $x + 2$.

Como $x + 2 = x - (-2)$, se obtiene

$$(-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 14 = 0$$

lo que indica que el polinomio dado es divisible por $x + 2$.

8. División de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$. — Como aplicación de lo que precede, veamos cuándo la suma o diferencia de dos potencias de igual grado es divisible por la suma o diferencia de las bases.

Distinguiremos los cuatro casos a que da lugar el doble signo $\pm$.

PRIMER CASO $(x^m - a^m) : (x - a)$

El resto de esta división, será

$$R = a^m - a^m = 0;$$ luego, la división es *siempre exacta.*

Para calcular el cociente, bastará aplicar la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccccc} +a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a^m \\ & & +a & +a^2 & +a^3 & \dots & +a^{m-2} & +a^{m-1} & +a^m \\ \hline & 1 & +a & +a^2 & +a^3 & \dots & +a^{m-2} & +a^{m-1} & 0 = \text{resto} \end{array}$$

El cociente es, por tanto,

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

SEGUNDO CASO. $(x^m + a^m) : (x - a)$

La división *nunca es exacta*, pues $R = a^m + a^m = 2a^m \neq 0$.

El cociente será:

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

TERCER CASO. $(x^m - a^m) : (x + a)$

Si m es par,

$$R = (-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0;$$ *división exacta.*

Si m es impar,

$$R = (-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2a^m \neq 0;$$ *división inexacta.*

El cociente será:

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \dots + (-a)^{m-2}x + (-a)^{m-1}$$

CUARTO CASO. $(x^m + a^m) : (x + a)$

Si m es par,

$$R = (-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m \neq 0;$$ *división inexacta.*

Si m es impar,

$$R = (-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0; \text{ división exacta.}$$

El cociente será:

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - a^3x^{m-4} + \ldots + (-a)^{m-2}x + (-a)^{m-1}$$

EJEMPLOS:

$$(x^5-a^5) : (x-a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$$

$$(x^6-a^6) : (x+a) = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5$$

$$(x^5+y^5) : (x+y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $(3\,a^2b-2\,ab^2+ab-1) + (5\,ab^2-2\,a^2b-1+ab) + (3-4\,ab+a^2b-2\,ab^2)$
2. $(1-xy-y^2-z^2) + (3\,xy+2\,y^2) + (-3\,z^2-5+xy) + (3\,xy-x^2-z^2)$
3. $(27\,a^3b-3\,a^2b-7\,a^3b^2) + (6\,a^2b+8\,a^3b^2-7\,a^3b) + (-3\,a^3b+10\,a^3b^2-a^2b)$
4. $[2\,a^3+3\,(x-y) - 5\,(a^2+b)] + [-a^3+2\,(a^2+b) - 8\,(x-y)] + [12\,(x-y) + 10\,(a^2+b) - 6\,a^3]$
5. $[2\,(c+d) - 3\,(x^2-y) - 2\,(y^2+z^2)] + [5\,(x^2-y) - 5\,(c+d) + 6\,(y^2+z^2)] + [5\,(y^2+z^2) - 4\,(c+d) + 5\,(x^2-y)] + [7\,(c+d) - (y^2+z^2) + 2\,(x^2-y)]$
6. $\left(\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{5}y^2\right) + \left(\frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{3}{10}y^2\right) + \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{14}{15}xy - y^2\right)$
7. $(0'4\,x^3+0'3\,x^2-1'7\,x+2'8) + (9'7\,x^2-3'4\,x^3+2\,x)$
8. $(5\,ab-3\,a^2b-2\,a-7) - (10+5\,a^2b-7\,ab-3\,a)$
9. $\left(\frac{5}{8}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{4}x - 3\right) - \left(\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{4}{5}x^2\right)$
10. $(7\,y^3-3\,xy^2+5\,x^2y-7\,y-2\,x-1) - (7\,y^2-3\,y^3+5\,xy^2+6\,x^3-3)$
11. $[(x^2y-2x^3-5xy^2)+(5xy^2-3x^2y+4y^3)] - [(2x^3-7x^2y+6y^3)+(6xy^2-5y^3)]$
12. $(3\,a^2+2\,b^2+3\,c^2)\,(4\,a^2+5\,b^2-6\,c^2)$

13. $(2\,ab^2-6\,a^2b-b^3-5\,a^3)\,(8\,ab^2-3\,b^3+3\,a^2b)$

14. $(3\,x^4+2\,x^3-4\,x^2+2)\,(3\,x^4-4\,x^2+14\,x+2)$

15. $[2\,(a+b)^2-3\,(x-y)\,(a+b)+4\,(x-y)^2]\,[3\,(x-y)-5\,(a+b)]$

16. $(8\,x^5-14\,x^4-5\,x^3+16\,x^2-8\,x+3):(2\,x^2-5\,x+3)$

17. $[(x+y)\,(x-y)+4\,z\,(y-z)]:(x+y-2\,z)$

18. $\{a\,[b\,(a-c)+a\,(a+c)]-c\,[(a+b)\,c-(ac-b^2)]\}:(a^2-bc)$

19. $\{a^3\,[3\,a^2-b\,(33\,b-5\,a)]-20\,a^2b^3\}:a\,(a+4\,b)$

20. $\left(\frac{1}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2x+\frac{27}{2}ax^2-27\,x^3\right):\left(\frac{1}{2}a-3\,x\right)$

21. $\left(\frac{9}{16}m^4-\frac{7}{8}m^3n+\frac{19}{36}m^2n^2+\frac{1}{6}mn^3\right):\left(\frac{3}{2}m+\frac{1}{3}n\right)$

22. $\left(\frac{3}{4}a^2c^3+\frac{6}{125}a^5\right):\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ac\right)$

Haciendo uso de la regla de Ruffini, hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

23. $(x^3-7\,x^2+11\,x-5):(x-3)$

24. $(x^4-5\,x^3+5\,x^2+x-6):(x+2)$

25. $(3\,x^4-2\,x^3+x^2-5\,x+1):(x-2)$

26. $(5x^6-4\,x^5+2\,x^3-7\,x^2+4):(x+5)$

27. $(2\,x^8-5\,x^5+x^4+6\,x^2-3\,x-100):(x-4)$

28. $(3\,x^9-9\,x^8+2\,x^6-6\,x^5-x^3+3\,x^2+4\,x-12):(x-3)$

29. $(6\,a^4+a^2-15):\left(a^2-\frac{3}{2}\right)$

30. $(x^5-10\,x^4y+40\,x^3y^2-80\,x^2y^3+80\,xy^4+68\,y^5):(x-2\,y)$

Calcular el resto de las siguientes divisiones sin efectuar la operación:

31. $(x^3-2\,x^2-3):(x-1)$

32. $(3\,x^3-7\,x^2-3\,x+15):(x+3)$

33. $(2\,x^3-x^2+3):(x+1)$

34. $(x^4-8\,x^2-9):(x-2)$

Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios haciendo uso de la regla de Ruffini:

35. $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1$ para $x = 2$

36. $2x^4 - 3x^3 + x - 7$ para $x = -2$

37. $2x^3 - 14x + 12$ para $x = 2$

38. $x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 163x - 210$ para $x = -5$

39. $x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x$ para $x = -3$

40. Dada la función $f(x) = x^3 - 5x + 3$, hallar $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$, haciendo uso de la regla de Ruffini.

41. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, hallar por la regla de Ruffini $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$.

¿Son exactas las siguientes divisiones? En caso afirmativo, escribir directamente el cociente, y en caso negativo, hallar el resto.

42. $(x^4-16) : (x+2)$

43. $(x^6+64) : (x-2)$

44. $(x^5+1) : (x+1)$

45. $(x^{10}+y^{10}) : (x^2+y^2)$

46. $(x^5-243) : (x+3)$

47. $(64x^6-1) : (2x+1)$

48. $(x^8-y^8) : (x^4-y^4)$

49. $(x^3-125) : (x+5)$

50. $(32x^5+243) : (2x+3)$

51. $(a^6x^{12}+1) : (a^2x^4+1)$

52. ¿Para qué valor de p, $3x^2 - px + 10$ es divisible por $x - 5$?

53. ¿Para qué valor de a, $x^2 - 7x + a$ es divisible por $x - 2$?

54. ¿Qué valor ha de tomar b para que $3x^2 - 7x^2 - 9x - b$ sea divisible por $x - 3$?

55. ¿Qué número se ha de añadir a $x^3 + 2x^2$ para que sea divisible por $x + 4$?

56. ¿Qué valor ha de tomar k para que $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - kx + 1$ sea divisible por $x - 2$?

57. Hallar el valor de a para el cual $x^3 - 5x^2 + ax - 12$ es divisible por $x + 2$.

58. ¿Qué valor ha de tener b para que $x + 3$ sea un factor de $x^3-4x-12b$?

59. En el polinomio $5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + m$, determinar el valor de m para que al dividirlo por $x + 2$ dé 130 de resto.

60. ¿Qué valor ha de tener m para que $x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 163x - m$ sea divisible por $x + 5$?

61. ¿Qué valor ha de darse a b para que $x - 3$ sea un factor de

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 12x + b?$$

2. Descomposición factorial de polinomios

La descomposición de un polinomio en factores no siempre es posible, y aun en el caso de que lo sea, la operación puede presentar gran dificultad. Nosotros nos limitaremos a los casos más sencillos.

9. Extracción de un factor común. — Según la propiedad distributiva de la multiplicación se verifica que

$$a\,(x+y+z) = ax + ay + az$$

de donde se deduce que el factor a puede sacarse del polinomio $ax + ay + az$ con sólo dividir cada término por a.

EJEMPLO 1.º — Descomponer en factores el polinomio $6\,a^2x^3 - 12\,a^2x^2 - 18\,a^3x$. Observando que el factor $6\,a^2x$ se encuentra en todos los términos, tendremos:

$$6\,a^2x^3 - 12\,a^2x^2 - 18\,a^3x = 6\,a^2x\,(x^2 - 2\,x - 3\,a)$$

EJEMPLO 2.º — Descomponer en factores el polinomio

$$(x-1)\,(x^2-4) - (x-1)\,(x-2) + 3\,(x-1)$$

Como el factor $x - 1$ es común a los tres términos del polinomio, podemos escribir:

$$(x-1)\,(x^2-4) - (x-1)\,(x-2) + 3\,(x-1) =$$
$$= (x-1)\,[(x^2-4) - (x-2) + 3] = (x-1)\,(x^2-x+1)$$

EJEMPLO 3.º — Descomponer en factores el polinomio $x\,(a-b) - 3\,y\,(b-a)$. Si tenemos en cuenta que $b - a = -(a-b)$, podremos escribir:

$$x\,(a-b) - 3\,y\,(b-a) = x\,(a-b) + 3\,y\,(a-b) = (a-b)\,(x+3\,y)$$

10. Extracciones sucesivas de factores comunes. — Sea, por ejemplo, el polinomio

$$ax + bx + ay + by$$

Sacando el factor x del primero y segundo términos, y el factor y del tercero y cuarto, resulta

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$$

y como $a + b$ se encuentra en los dos términos del segundo miembro, tendremos en definitiva que

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y)$$

OTRO EJEMPLO:

$$8ax + 3bd - 4ad - 6bx = 8ax - 4ad - 6bx + 3bd =$$
$$= 4a(2x-d) - 3b(2x-d) = (2x-d)(4a-3b)$$

11. Descomposición de un trinomio cuadrado perfecto. — Como

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

diremos que la condición para que un trinomio sea cuadrado perfecto es que dos de sus términos sean cuadrados perfectos, y que el otro término sea igual a más o menos el duplo del producto de las raíces cuadradas positivas de los dos primeros.

Así, el trinomio $9x^2 - 12xy + 4y^2$ es cuadrado perfecto, ya que

$$9x^2 = (3x)^2, \qquad 4y^2 = (2y)^2, \qquad -12xy = -2(3x)(2y)$$

Por consiguiente,

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x-2y)(3x-2y)$$

EJEMPLOS:

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x+3y)(x+3y)$$
$$a^2 - a + \tfrac{1}{4} = (a-\tfrac{1}{2})(a-\tfrac{1}{2})$$
$$-a^2 + 2ab - b^2 = -(a^2-2ab+b^2) = -[(a-b)(a-b)]$$

12. Descomposición de la diferencia de dos cuadrados. — Teniendo en cuenta que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

diremos que la diferencia $a^2 - b^2$ se compone de los factores $(a+b)$ y $(a-b)$.

EJEMPLO 1.º — Descomponer en factores $25\,x^2 - \frac{9}{4}\,y^2$

Como $25\,x^2$ es el cuadrado de $5\,x$ y $\frac{9}{4}\,y^2$ lo es de $\frac{3}{2}\,y$, los factores que buscamos serán la suma y la diferencia de $5\,x$ y $\frac{3}{2}\,y$. Es decir:

$$25\,x^2 - \frac{9}{4}\,y^2 = \left(5\,x + \frac{3}{2}\,y\right)\left(5\,x - \frac{3}{2}\,y\right)$$

EJEMPLO 2.º — Descomponer en factores $9\,x^2 - 36\,y^2$.

Sacando primeramente el factor común 9, se tiene:

$$9\,x^2 - 36\,y^2 = 9\,(x^2 - 4\,y^2) = 9\,(x+2\,y)\,(x-2\,y)$$

EJEMPLO 3.º — Descomponer en factores

$$x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 - 4\,a^2 - 12\,ab - 9\,b^2$$

Podemos agrupar los seis términos en dos trinomios cuadrados perfectos. De este modo:

$$x^2 - 4\,xy + 4\,y^2 - 4\,a^2 - 12\,ab - 9\,b^2 = (x^2 - 4\,xy + 4\,y^2) - (4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2) =$$
$$= (x-2\,y)^2 - (2\,a+3\,b)^2 = (x-2\,y+2\,a+3\,b)\,(x-2\,y-2\,a-3\,b)$$

OBSERVACIÓN. — Una suma de dos cuadrados no puede descomponerse en factores de primer grado.

13. Descomposición de un trinomio de la forma $x^2 + px + q$. — Como

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

se deduce que si p es igual a la suma algebraica de dos números a y b, y q es el producto de esos mismos números, los factores de $x^2 + px + q$ serán $x + a$ y $x + b$.

EJEMPLO 1.º — Descomponer en factores $x^2 + 8\,x + 12$.

Hallaremos dos números cuya suma sea 8 y cuyo producto sea 12. Dichos números son 6 y 2. Luego,

$$x^2 + 8\,x + 12 = (x+6)\,(x+2)$$

EJEMPLO 2.º — Descomponer en factores $a^2 + a - 30$.

Bastará hallar dos números cuya suma sea 1 y cuyo producto sea igual a -30. Estos números son 6 y -5. Luego, tendremos:

$$a^2 + a - 30 = (a+6)\,(a-5)$$

14. Descomposición de un trinomio de la forma px^2+qx+r. — Teniendo en cuenta que

$$(ax+b)(a'x+b') = aa'x^2 + (ab'+a'b)x + bb'$$

si designamos por p al producto aa', por r al producto bb', y por q a la suma algebraica de los productos ab' y $a'b$, vemos que los factores del trinomio $px^2 + qx + r$ serán $ax + b$ y $a'x + b'$.

EJEMPLO. — Descomponer en factores el trinomio $6\ x^2 - 11\ x - 10$.

Como el producto de los coeficientes extremos es

$$6 \times (-10) = -60 = aa' \times bb' = ab' \times a'b$$

y como sabemos también que

$$-11 = ab' + a'b$$

bastará descomponer -60 en un producto de dos factores cuya suma sea igual a -11 (*). Estos factores serán 4 y -15, pues se verifica que

$$4 \times (-15) = -60 \quad \text{y} \quad 4 + (-15) = -11$$

Según esto, podremos escribir:

$$6\,x^2 - 11\,x - 10 = 6\,x^2 + 4\,x - 15\,x - 10 =$$
$$= 2\,x\,(3\,x+2) - 5\,(3\,x+2) = (3\,x+2)\,(2\,x-5)$$

15. Descomposición de una suma o diferencia de dos cubos. — Fácilmente podemos comprobar que

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

EJEMPLOS:

$$27\,x^3 + 64\,y^3 = (3\,x)^3 + (4\,y)^3 = (3\,x+4\,y)(9\,x^2-12\,xy+16\,y^2)$$
$$125\,a^3 - 8\,b^3 = (5\,a)^3 - (2\,b)^3 = (5\,a-2\,b)(25\,a^2+10\,ab+4\,b^2)$$
$$81\,x^4 + 3\,x = 3\,x\,(27\,x^3+1) = 3\,x\,(3\,x+1)(9\,x^2-3\,x+1)$$

16. Descomposición de una suma o diferencia de potencias de igual grado. — En virtud de lo expuesto en el párrafo 8, podemos fá-

(*) Para hallar estos factores por tanteo, es muy conveniente descomponer el número (-60 en este caso) en factores primos.

cilmente descomponer en factores expresiones de la forma $x^n \pm y^n$, en donde n representa un número entero positivo.

De acuerdo con la regla de Ruffini, se verifican en efecto las siguientes igualdades:

1. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+x^{n-4}y^3+\ldots+y^{n-1})$

ya sea n par o impar.

2. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+\ldots+y^{n-1})$

siempre que n sea impar.

3. $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-x^{n-4}y^3+\ldots-y^{n-1})$

siempre que n sea par.

Este método de descomposición factorial se emplea solamente cuando la expresión dada no puede considerarse como una diferencia de cuadrados o como una suma o diferencia de cubos. Así, no acudiremos a este método para descomponer $a^8 - b^8$ (diferencia de cuadrados), $a^9 + b^9$ (suma de dos cubos), $a^9 - b^9$ (diferencia de cubos), pero lo haremos en expresiones como $x^5 + y^5$, $x^7 - y^7$, etc.

EJEMPLOS:

$$x^7 - y^7 = (x-y)(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$$
$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$

En cambio, para descomponer $a^8 - b^8$ y $x^9 + y^9$, pondremos:

$$a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4+b^4)(a^4-b^4) =$$
$$= (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2) =$$
$$= (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = (x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6) =$$
$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$$

17. Descomposición factorial de un polinomio en x. — La condición o criterio de divisibilidad de un polinomio en x por el binomio $x - a$ (párrafo 7), permite descomponer fácilmente en factores un polinomio en x de grado n, cuando se conocen n valores distintos de x para los cuales se anula.

TEOREMA. — *Si un polinomio entero* P(x) *de grado* n *se anula para* n *valores distintos de la variable* x, *como* a_1, a_2, a_3, ..., a_n, *es igual al producto del coeficiente* A *del término de mayor grado por los binomios* $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, ..., $(x-a_n)$.

En efecto: si el polinomio se anula para $x = a_1$, será divisible por $x - a_1$, y podremos escribir

$$P(x) = (x-a_1)\,Q_1(x)$$

igualdad en la que $Q_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, que se anula para $x = a_2, a_3, \ldots, a_n$, ya que, debiendo anularse el producto de los dos factores del segundo miembro y no siendo nulo el primer factor (puesto que $a_2, a_3, \ldots, a_n$ son distintos de a_1), deberá serlo el segundo. Pero el coeficiente del término de mayor grado de $Q_1(x)$ sigue siendo A.

Descomponiendo ahora del mismo modo $Q_1(x)$ en el producto $(x-a_2)\,Q_2(x)$, tendremos que

$$P(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\,Q_2(x)$$

igualdad en la que $Q_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$, que se anula para $x = a_3, a_4, \ldots, a_n$, y cuyo término de mayor grado tiene también el coeficiente A.

Procediendo de la misma forma, llegaríamos a descomponer a $P(x)$ en el producto

$$(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,\ldots\,(x-a_{n-1})\,Q_{n-1}(x)$$

en donde $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de primer grado (es decir, un binomio), cuyo coeficiente de x es A, y que se anula para $x = a_n$, no pudiendo ser otro que $A(x-a_n)$. Por consiguiente,

$$P(x) = A(x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots\,(x-a_{n-1})\,(x-a_n)$$

como pretendíamos demostrar.

EJEMPLO. — El polinomio $2x^3 - 3x^2 - 29x - 30$, que se anula para $x = 5$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = -2$, será igual al producto

$$2\,(x-5)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)$$

como es fácil comprobar.

Basados en el teorema precedente y después de efectuado el estudio de la ecuación de segundo grado (Lección 8.ª), nos resultará mucho más fácil la descomposición en factores de un trinomio de segundo grado en cualquiera de sus formas, $x^2 + px + q$ o $px^2 + qx + r$.

EJERCICIOS

Descomponer en factores los polinomios siguientes:

62. $x^3 - 5ax^2$
63. $5ax - 5a^3x^2$
64. $ax^2 - a^2x + a^3$
65. $x^3 - x^2y$
66. $5x + 25x^2y$

67. $21 - 56x$
68. $-2x^3 + 4x$
69. $54 - 81x$
70. $10x^3 - 25x^4y$
71. $3x^3 - x^2 + x$

72. $-ay + by + cy$
73. $6x^3 + 2x^4 + 4x^5$
74. $p^2x^2 - apxy + bpxy$
75. $x^3 - x^2y + xy^2$
76. $3a^4 - 3a^3b + 6a^2b^2$

77. $2x^2y^3 - 6x^2y^2 + 2xy^3$
78. $6x^3 - 9x^2y + 12xy^2$
79. $5x^5 - 10a^2x^3 - 15a^3x^3$
80. $7a - 7a^3 + 14a^4$
81. $38a^3x^5 + 57a^4x^2$

Descomponer en factores:

82. $a^2 + ab + ac + bc$
83. $a^2c^2 + acd + abc + bd$
84. $2x + cx + 2c + c^2$
85. $5a + ab + 5b + b^2$
86. $ax - bx - az + bz$

87. $mx - my - nx + ny$
88. $mx - ma + nx - na$
89. $2ax + ay + 2bx + by$
90. $3ax - bx - 3ay + by$
91. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

92. $6x^2 - 9ax + 4bx - 6ab$
93. $mx - 2my - nx + 2ny$
94. $ax^2 - 3bxy - axy + 3by^2$
95. $x^2 + mxy - 4xy - 4my^2$
96. $ax^2 + bx^2 + 2a + 2b$

97. $x^2 - 3x - xy + 3y$
98. $2x^4 - x^3 + 4x - 2$
99. $3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$
100. $x^4 + x^3 + 2x + 2$
101. $y^3 - y^2 + y - 1$

Descomponer en factores los trinomios siguientes:

102. $x^2 - 4x + 4$
103. $x^2 - 6x + 9$
104. $a^2 + 10a + 25$
105. $4a^2 + 36ab + 81b^2$
106. $x^4 + 16x^2 + 64$

107. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} - 2$
108. $x^{12} + 2x^6 + 1$
109. $9(2x+y)^2 + 6(2x+y) + 1$
110. $9a^6 - 60a^3 + 100$
111. $-x^4 - 4x^2 - 4$

112. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{x^2} - 4$

113. $16x^2y^4 - 88xy^2z + 121z^2$

114. $-49 - 14x - x^2$

115. $8x^2 - 24xy + 18y^2$

116. $75a^2 + 90ax + 27x^2$

117. $\frac{9y^2}{x^2} + \frac{x^2}{9y^2} - 2$

118. $x^6 + 12x^3 + 36$

119. $y^{12} + 4y^6 + 4$

120. $64a^4 + 16a^2b^2 + b^4$

121. $64a^2 + 32a + 4$

Descomponer en factores:

122. $x^2 - 4a^2$

123. $9x^2 - 1$

124. $25x^2 - 16$

125. $121 - b^2$

126. $400 - a^2$

127. $a^2b^2 - 9x^6$

128. $x^6y^6 - 4$

129. $1 - a^2b^2$

130. $a^6 - b^4$

131. $x^8 - a^2$

132. $x^2y^4 - 144z^2$

133. $64x^2 - 25z^6$

134. $49x^4 - 16y^4$

135. $16x^{16} - 9y^6$

136. $25x^{10} - 16a^8$

Descomponer en factores los trinomios siguientes:

137. $x^2 + 3x + 2$

138. $x^2 - x - 2$

139. $x^2 - 11x + 30$

140. $x^2 + 4x - 5$

141. $x^2 + 12x + 35$

142. $x^2 + 7x + 12$

143. $x^2 - 11x + 10$

144. $x^2 + 20x + 51$

145. $x^2 - x - 42$

146. $x^2 - 2x - 35$

147. $x^2 - 14x - 15$

148. $40 - 3x - x^2$

149. $x^2 + x - 110$

150. $42 - x - x^2$

151. $66 + 5x - x^2$

152. $3x^2 + 5x + 2$

153. $3x^2 + 10x + 3$

154. $2x^2 + 9x + 4$

155. $3x^2 + 8x + 4$

156. $2x^2 + 7x + 6$

157. $3x^2 + 19x - 14$

158. $6x^2 - 31x + 35$

159. $4x^2 + x - 14$

160. $3x^2 + 41x + 26$

161. $4x^2 + 23x + 15$

162. $2x^2 + 3x - 2$

163. $3x^2 + x - 2$

164. $2x^2 - x - 1$

165. $3x^2 + 7x - 6$

166. $2x^2 + x - 28$

Descomponer en factores:

167. $x^3 + 8y^3$

168. $27x^3 + 1$

169. $1 - 8y^3$

170. $a^3b^3 - c^3$

171. $8x^3 + 27y^3$

172. $343 - 8x^3$

173. $a^3 + 27b^3$

174. $27x^3 - 64y^3$

175. $125x^3 - 1$

176. $x^3y^3 + z^3$

177. $a^6 + 729b^3$

178. $8x^3 - 729y^6$

179. $m^3n^3 - 27x^3$

180. $z^3 - 64y^6$

181. $x^3y^3 - 512$

Descomponer en factores:

182. $x^5 - y^5$

183. $x^7 + y^7$

184. $x^5 - 32y^5$

185. $a^6 - b^6$

186. $x^{10} + 1$

187. $a^{12} - b^{12}$

188. $128a^7 + b^7$

189. $a^5 - b^{10}$

190. $x^6 - y^{12}$

191. $x^{10} - y^{10}$

192. $x^9 + y^9$

193. $a^5 + 32$

194. $a^{12} + b^{12}$

195. $x^7 - y^{14}$

196. $128a^7 - 2187b^7$

197. Comprobar primeramente que el polinomio $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ se anula para $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$, y descomponerlo luego en factores.

198. Descomponer en factores el polinomio $6x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 8x - 4$, después de comprobar que se anula para $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{2}{3}$.

199. Descomponer en factores el polinomio $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$, después de comprobar que se anula para $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ y $x = -2$.

200. Transformar en producto de tres binomios el polinomio

$$a^2b - b^3 - a^3 + ab^2$$

201. Descomponer en tres factores el binomio $98x^2y^2 - 50a^4b^2$.

202. Transformar el polinomio siguiente en producto de seis factores binomios:
$a^2c^2m^2 - a^2d^2m^2 - a^2c^2n^2 + a^2d^2n^2 - b^2c^2m^2 + b^2d^2m^2 + b^2c^2n^2 - b^2d^2n^2$

203. Descomponer en producto de dos factores la expresión

$$(am+bn)^2 + (an-bm)^2$$

204. Transformar $(a+b)(a+c) - (b+d)(c+d)$ en $(a-d)(a+b+c+d)$.

205. Transformar $(1+ab)^2 - (a+b)^2$ en $(1-a^2)(1-b^2)$.

3. Fracciones algebraicas

18. Revisión de las fracciones algebraicas. — *Fracciones algebraicas son aquellas cuyos términos, o al menos el denominador, son expresiones algebraicas.*

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{4a^2}; \qquad \frac{2x+1}{3x^2}; \qquad \frac{5x^2-4}{2x+3}; \qquad \frac{4x^2-3}{6x^2-5x+1}$$

De una fracción algebraica se dice que es *propia*, respecto de la misma letra, cuando el grado del numerador es menor que el del denominador; e *impropia*, cuando el grado del numerador es igual o mayor que el del denominador.

Así, en los ejemplos anteriores, son propias las dos primeras fracciones, e impropias las otras dos.

Expresión algebraica *mixta* es la suma algebraica de una expresión entera y una fracción algebraicas.

EJEMPLOS:

$$3x^2-2x+1+\frac{1}{x-1}; \qquad x-1-\frac{6x-2}{x^2+x-1}$$

Para reducir una expresión algebraica mixta a fracción, se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción, y el resultado se suma con el numerador.

EJEMPLOS:

$$x-1-\frac{6x-2}{x^2+x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x-1)-(6x-2)}{x^2+x-1}=\frac{x^3-8x+3}{x^2+x-1}$$

Recíprocamente: Para reducir una fracción algebraica impropia a expresión mixta, se divide el numerador por el denominador. El cocien-

te entero que resulte será la parte entera de la expresión mixta, y la parte fraccionaria tendrá por numerador el resto de la división y por denominador, el mismo de la fracción.

EJEMPLO. — Reducir a expresión mixta la siguiente fracción impropia:

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Procediendo del modo indicado se obtiene:

$$\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1} = x^2 - 4x + 2 + \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$$

19. Valor numérico de una fracción. — *Valor numérico de una fracción algebraica es el cociente del valor numérico del numerador por el del denominador, siempre que este cociente tenga un valor determinado.*

1) Así, el valor numérico de la fracción

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} \text{ para } x = -4 \text{ es } \frac{-4 - 1}{16 - 8 - 3} = \frac{-5}{5} = -1.$$

2) La misma fracción para $x = -3$ toma el valor

$$\frac{-3 - 1}{9 - 6 - 3} = \frac{-4}{0}$$

Este cociente no se puede calcular, porque no hay ningún número que multiplicado por el denominador cero, dé un producto igual a -4. Expresamos esto diciendo que la fracción dada *no tiene sentido* o que *no tiene valor numérico* para $x = -3$. Sin embargo, simbólicamente, diremos que su valor es $-\infty$.

En general, toda fracción de la forma $\frac{n}{0}$ se representa por el símbolo ∞ (infinito), afectado al signo $+$ o $-$, según que n sea positiva o negativa.

3) Finalmente, si en la misma fracción

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} \text{ hacemos } x = 1, \text{ resulta } \frac{1 - 1}{1 + 2 - 3} = \frac{0}{0}$$

El cociente obtenido es indeterminado, ya que cualquier número multiplicado por el denominador cero, da por producto el numerador. Diremos, por tanto, que el valor numérico de la fracción dada para $x = 1$ es *indeterminado*.

Dos fracciones algebraicas son *equivalentes* o *iguales* si toman los mismos valores numéricos para todos los valores de las letras que no anulan al denominador.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — *Si se multiplican o dividen los dos términos de una fracción algebraica por una expresión entera, se obtiene una fracción equivalente a la primera, excepto para los valores de las letras que anulen al denominador de una u otra de dichas fracciones.*

20. Simplificación de fracciones. — *Simplificar una fracción algebraica es hallar otra equivalente, cuyos términos sean de menor grado que los de la primera.*

Para simplificar una fracción se divide a sus dos términos por un factor común. La fracción obtenida será *irreducible* si los dos términos se han dividido por el producto de todos los factores comunes, tomados con el menor exponente con que figuran en la fracción.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{20\,a^5b^4c^2d}{5\,a^4b^5c^2} = \dfrac{4\,acd \times 5\,a^4b^4c^2}{b \times 5\,a^4b^4c^2} = \dfrac{4\,acd}{b}$

2.º $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$

3.º $\dfrac{x+3y}{x^2+x+3y-9y^2} = \dfrac{x+3y}{(x^2-9y^2)+(x+3y)} =$

$$= \frac{x+3y}{(x+3y)(x-3y)+(x+3y)} = \frac{1}{(x-3y)+1} = \frac{1}{x-3y+1}$$

21. Verdadero valor de una fracción. — Hemos visto en el párrafo 19 cómo al tratar de hallar el valor numérico de una fracción para ciertos valores particulares de las letras, aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Muchas veces, sin embargo, esta indeterminación es sólo aparente, y en algunos casos resulta sencilla la transformación que ha de efectuarse con la fracción que la originó, para que dicha indeterminación desaparezca. A esto se llama hallar el *verdadero valor* de la fracción.

Cuando los términos de la fracción son polinomios en x, el procedimiento que se emplea consiste en suprimir en el numerador y denominador un factor común, que es el que los anula.

EJEMPLO. — Hallar el verdadero valor de la fracción

$$\frac{2x-4}{x^2-5x+6} \quad \text{para} \quad x=2$$

Sustituyendo x por 2 en la fracción, resulta

$$\frac{4-4}{4-10+6}=\frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

El hecho de anularse los polinomios $2x-4$ y x^2-5x+6 al hacer $x=2$, indica que los dos son divisibles por $x-2$ (núm. 7). Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene:

$$(2x-4):(x-2)=2$$
$$(x^2-5x+6):(x-2)=x-3$$

o sea, que podemos escribir:

$$\frac{2x-4}{x^2-5x+6}=\frac{2(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{2}{x-3}$$

Pero la última fracción toma el valor -2 para $x=2$; luego, ése será el verdadero valor de la fracción propuesta.

En general, siempre que se trate de fracciones cuyos términos sean polinomios en x, y que adquieran la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ al hacer $x=a$, aplicaremos la siguiente regla para hallar su verdadero valor:

1.° *Se simplifica la fracción dividiendo numerador y denominador por el factor* x − a *cuantas veces sea posible obtener división exacta.*

2.° *Se sustituye* x *por* a *en la última fracción hallada, y el resultado será el verdadero valor de la fracción propuesta.*

Si después de hecha la simplificación se anula solamente el denominador al sustituir x por a, el verdadero valor de la fracción será

$\frac{n}{0} = \infty$; y si es sólo el numerador el que se anula, la fracción valdrá $\frac{0}{n} = 0$.

EJEMPLO. — Hallar el verdadero valor de la fracción

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 8x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} \quad \text{para} \quad x = 1$$

Sustituyendo x por 1, resulta $\frac{2 + 5 - 8 + 1}{1 - 1 - 1 + 1} = \frac{0}{0}$; luego, los dos términos de la fracción son divisibles por $x - 1$. Haciendo la división y sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 8x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{(x-1)(2x^2+7x-1)}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{2x^2 + 7x - 1}{x^3 - 1} = \frac{8}{0} = \infty$$

Si la fracción hubiera sido

$$\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{2x^3 + 5x^2 - 8x + 1}$$

procediendo de igual modo que antes, obtendríamos, para $x = 1$, el valor $\frac{0}{8} = 0$.

22. Reducción de fracciones a común denominador. — ***Reducir varias fracciones algebraicas a común denominador es hallar otras respectivamente equivalentes a las primeras y que tengan el mismo denominador.***

Para reducir varias fracciones a común denominador, se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.

EJEMPLO. — Para reducir a común denominador las fracciones

$$\frac{1}{x - y}; \qquad \frac{2x}{x + y}; \qquad \frac{x - y}{y}$$

multiplicaremos los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las otras dos. Es decir:

$$\frac{1}{x - y} = \frac{(x+y)y}{(x-y)(x+y)y}; \qquad \frac{2x}{x + y} = \frac{2xy(x-y)}{(x-y)(x+y)y}$$

$$\frac{x - y}{y} = \frac{(x-y)^2(x+y)}{(x-y)(x+y)y}$$

Para reducir fracciones al DENOMINADOR COMÚN MÁS SENCILLO, *se descomponen los denominadores en factores lo más posible. Se forma el producto de los factores comunes y no comunes con el mayor exponente, y este producto será el denominador común. Los numeradores se obtienen dividiendo el denominador común por cada denominador, y multiplicando luego el cociente por el numerador respectivo.*

EJEMPLO 1.º — Reducir al denominador común más sencillo las fracciones siguientes:

$$\frac{A}{2\,ab^2c}; \qquad \frac{B}{4\,a^3b}; \qquad \frac{C}{12\,abc^3}$$

Como los factores comunes de los denominadores, con el mayor exponente, son 2^2, a^3, b^2, c^3, y los no comunes, 3, el denominador común será $12\,a^3b^2c^3$.

Ahora bien: dividiendo $12\,a^3b^2c^3$ por $2\,ab^2c$, $4\,a^3b$ y $12\,abc^3$, se obtiene, respectivamente, $6\,a^2c^2$, $3\,bc^3$ y a^2b. Luego, las fracciones pedidas serán:

$$\frac{A}{2\,ab^2c} = \frac{6\,a^2c^2A}{12\,a^3b^2c^3}; \qquad \frac{B}{4\,a^3b} = \frac{3\,bc^3B}{12\,a^3b^2c^3}; \qquad \frac{C}{12\,abc^3} = \frac{a^2bC}{12\,a^3b^2c^3}$$

EJEMPLO 2.º — Reducir las siguientes expresiones a fracciones equivalentes con denominador común lo más sencillo posible:

$$3\,ab; \qquad \frac{a+2}{a-b}; \qquad \frac{a-4}{a+b}; \qquad \frac{a^2+2}{a^2-b^2}$$

Teniendo en cuenta que $3\,ab$ equivale a $\dfrac{3\,ab}{1}$, y que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, las fracciones que buscamos serán:

$$3\,ab = \frac{3\,ab\,(a^2-b^2)}{a^2-b^2}; \qquad \frac{a+2}{a-b} = \frac{(a+2)(a+b)}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a-4}{a+b} = \frac{(a-4)(a-b)}{a^2-b^2}; \qquad \frac{a^2+2}{a^2-b^2}$$

EJERCICIOS

Reducir las siguientes expresiones mixtas a fracciones:

206. $a^2 - \dfrac{a^3}{a-x} + ax + x^2$

207. $3m - 2n - \dfrac{3m^2 - 2n^2}{m+n}$

208. $x - y - \dfrac{x^2 - xy - y^2}{x+y}$

209. $1 + 2z + 4z^2 + \dfrac{z^3+1}{2z-1}$

210. $2x - y^2 + \dfrac{3xy - 4x^2}{x-y}$

211. $m - n - \dfrac{m^3 - n^3}{m^2 + mn + n^2}$

Reducir las siguientes fracciones impropias a expresiones mixtas:

212. $\dfrac{a^3 + b^3}{a-b}$

213. $\dfrac{4b^2 - 3b - 54}{b-4}$

214. $\dfrac{3x^3 - x^2 - 16x - 2}{x^2 + x - 3}$

215. $\dfrac{m^3 + 3m^2n + 6mn^2 + n^3}{m^2 + 2mn + n^2}$

216. $\dfrac{x^3}{x-y}$

217. $\dfrac{m^2 + n^2}{m+n}$

Calcular el valor numérico de las siguientes fracciones:

218. $\dfrac{3a^3b + 5abc - 4b^2}{6bc^2 - 4ab^2c}$ para $a = -2, \quad b = 3, \quad c = 5$

219. $\dfrac{3xy^2 - 2(x-y)^2 + 4x^2y}{1 - x^3 + 3(x+y)^2 - 2y}$ para $x = 2, \quad y = -3$

220. $\dfrac{x^3 - y^3 - 2x(1-y)}{x^4 + 2xy - 8}$ para $x = 3, \quad y = -1$

221. $\dfrac{3x^3 - 2(y-x^2) + (x-y)(x+y)}{5 + 3x - 2y^3 - (x-y)^2}$ para $x = -1, \quad y = 3$

222. $\dfrac{[a(a^2-b)+b(a-b^2)](a-b+a^2-b^2)}{(3a+1)\left(\dfrac{1}{a^2} + b^3\right)\dfrac{1}{2}b}$ para $a = 2, \quad b = \frac{1}{2}$

Hallar las fracciones irreducibles equivalentes a las siguientes fracciones:

223. $\dfrac{27\,a^2b^2c^3d^4}{63\,a^3b^3c^4d^5}$

224. $\dfrac{abx - bx^2}{acx - cx^2}$

225. $\dfrac{a+b}{a^3+b^3}$

226. $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$

227. $\dfrac{x^2-(a-b)\,x-ab}{x^2-(a+c)\,x+ac}$

228. $\dfrac{x^6-2\,x^3y^3+y^6}{x^6-y^6}$

229. $\dfrac{a^2+2\,ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-2\,bc-c^2}$

230. $\dfrac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a+c)^2-(b+d)^2}$

231. $\dfrac{x^2-x-20}{x^2+x-12}$

232. $\dfrac{x^2-7\,x+10}{2\,x^2-x-6}$

233. $\dfrac{x^3+4\,x^2-5\,x}{x^3-6\,x+5}$

234. $\dfrac{a^3+a^2+a-3}{a^3+3\,a^2+5\,a+3}$

235. $\dfrac{m+n}{(m+n)^2+n+m}$

236. $\dfrac{x-xy+z-yz}{1-3\,y+3\,y^2-y^3}$

237. $\dfrac{x^6-36}{x^6-12\,x^3+36}$

238. $\dfrac{1-216\,a^3}{x-4\,y-6\,ax+24\,ay}$

239. $\dfrac{2\,ax-ay-12\,bx+6\,by}{6\,ax-3\,ay-2\,bx+by}$

240. $\dfrac{x^2-y^2+z^2+2\,xz}{x^2+y^2-z^2+2\,xy}$

241. $\dfrac{m^2-2\,mn+n^2+3\,m-3\,n}{m^2-2\,mn+n^2-9}$

242. $\dfrac{(x^2-4)\,(x^2+4)\,(x+5)}{(x-2)\,(x^2+3\,x-10)\,(x^4-16)}$

Hallar el verdadero valor de las fracciones siguientes:

243. $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ para $x=3$

244. $\dfrac{x^2-5\,x+4}{x^2-8\,x+7}$ para $x=1$

245. $\dfrac{a^2-7\,a+12}{a^3-4\,a^2+a+6}$ para $a=3$

246. $\dfrac{x^3-3\,x^2+4}{x^3-2\,x^2-4\,x+8}$ para $x=2$

247. $\dfrac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8}$ para $x = -2$

248. $\dfrac{x^2 - (a-1)x - a}{x^2 - (a-2)x - 2a}$ para $x = a$

249. $\dfrac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{ab - b^2}$ para $a = b$

250. $\dfrac{8x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{8x^3 + 10x^2 - 11x + 2}$ para $x = \frac{1}{2}$

251. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x + 2}$ para $x = 1$

252. $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ para $x = 1$

253. $\dfrac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12}{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6}$ 1.º, para $x = 1$; 2.º, para $x = 2$, y 3.º, para $x = 3$

254. $\dfrac{2a^4 - 7a^3n + 9a^2n^2 - 5an^3 + n^4}{2a^4 - 11a^3n + 9a^2n^2 - an^3 - n^4}$ para $a = n$

Reducir las siguientes fracciones al denominador común más sencillo:

255. $\dfrac{a}{bc}, \dfrac{b}{ac}, \dfrac{-c}{ab}$

256. $\dfrac{a}{-bx}, \dfrac{-b}{ax^2}, \dfrac{c}{abx^3}$

257. $2, -1, \dfrac{1}{2a^2}, \dfrac{1}{-4a^4}$

258. $\dfrac{a+b}{a-b}, \dfrac{a-b}{(a+b)^2}, \dfrac{a}{a^2-b^2}$

259. $\dfrac{3-x}{x^2 - 9x + 20}, \dfrac{x+4}{7x^2 - 26x - 8}$

260. $\dfrac{n}{5x^2 - 4x - 12}, \dfrac{r}{x^2 + 4x - 12}, \dfrac{s}{x-2}$

261. $\dfrac{1}{a^3 - b^3}, \dfrac{5m}{b-a}, \dfrac{2n}{a^2 + ab + b^2}$

262. $\dfrac{2}{3x^3 - 21x^2}, \dfrac{3x}{x^2 - 5x - 14}, \dfrac{x^2}{x^3 - 343}$

263. $\dfrac{m+n}{am - bm - an + bn}, \dfrac{x-y}{m^2 - 2mn + n^2}$

264. $\dfrac{x}{(a-b)(b-c)}, \dfrac{y}{(b-c)(c-a)}, \dfrac{z}{(c-a)(a-b)}$

4. Operaciones con fracciones algebraicas

23. Adición y sustracción de fracciones algebraicas. — La suma o diferencia de varias fracciones algebraicas de *igual denominador*, es otra fracción del mismo denominador, que tiene por numerador la suma o diferencia de los numeradores.

Si las fracciones tienen *distinto denominador*, se reducen a común denominador y se aplica la regla precedente.

En el polinomio numerador que resulte se reducen los términos semejantes, y luego se simplifica la fracción si es posible.

EJEMPLOS:

1.° $\dfrac{3x-2}{y}+\dfrac{5x}{y}+\dfrac{7-x}{y}=\dfrac{3x-2+5x+7-x}{y}=\dfrac{7x+5}{y}$

2.° $\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{ab}{a^3+b^3}=$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{a^3+b^3}+\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}+\frac{ab}{a^3+b^3}=$$

$$=\frac{a^2-b^2+a^2-ab+b^2+ab}{a^3+b^3}=\frac{2a^2}{a^3+b^3}$$

3.° $1-a-a^2-\dfrac{a-a^2}{1-a^4}-\dfrac{2-a^2}{a^2+1}=$

$$=\frac{1-a-a^2}{1}-\frac{a-a^2}{1-a^4}-\frac{2-a^2}{a^2+1}=\frac{1-a-a^2}{1}-\frac{a(a-1)}{a^4-1}-\frac{2-a^2}{a^2+1}=$$

$$=\frac{1-a-a^2}{1}-\frac{a}{(a^2+1)(a+1)}-\frac{2-a^2}{a^2+1}=$$

$$=\frac{(a^2+1)(a+1)(1-a-a^2)-a-2+a^2}{(a^2+1)(a+1)}=-\frac{a^5+2a^4+a^3+a+1}{(a^2+1)(a+1)}$$

24. Multiplicación y división de fracciones algebraicas. — Para *multiplicar* fracciones, se forma una fracción que tenga por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores. No es necesario, por tanto, reducir a común denominador.

Para *dividir* fracciones, basta multiplicar la fracción dividendo por la fracción divisor invertida.

Tanto en la multiplicación como en la división se reducirá y simplificará la fracción que resulte. En la práctica se suprimen de antemano los factores que se encuentren a la vez en algún numerador y en algún denominador; de este modo aparecerá el producto simplificado.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \times \dfrac{xy+y^2}{x^2-xy} = \dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)} \times \dfrac{y(x+y)}{x(x-y)} = \dfrac{y}{x}$

2.º $\dfrac{3x+2}{4y^2} \times \left(\dfrac{2}{3x} - 1\right) : \dfrac{9x^2-4}{4-9x^2} =$

$$= \frac{3x+2}{4y^3} \times \frac{2-3x}{3x} \times \frac{-(4-9x^2)}{-(9x^2-4)} =$$

$$= \frac{3x+2}{4y^3} \times \frac{2-3x}{3x} \times \frac{9x^2-4}{(2+3x)(2-3x)} = \frac{9x^2-4}{12xy^3}$$

25. Fracciones compuestas. — Llámanse *compuestas* aquellas fracciones en las que uno de los términos o los dos a la vez están formados asimismo por fracciones o expresiones mixtas.

EJEMPLOS:

$$\frac{1-\dfrac{3}{4}}{4}; \qquad \frac{2}{1+\dfrac{5}{a+b}}; \qquad \frac{\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}}; \qquad \frac{\dfrac{2x+y}{x+y}-1}{1-\dfrac{y}{x+y}}$$

Constituyen un caso particular de la divión de fracciones. Para *simplificar* una fracción compuesta, se efectúan primeramente las operacio-

nes indicadas en el numerador y denominador, y luego se multiplica la fracción que ha resultado en el numerador por la inversa de la obtenida en el denominador.

Así,

$$\frac{\frac{2x+y}{x+y}-1}{1-\frac{y}{x+y}}=\frac{\frac{2x+y-x-y}{x+y}}{\frac{x+y-y}{x+y}}=\frac{x}{x+y}\times\frac{x+y}{x}=1$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

265. $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

266. $\frac{2}{a-3}+\frac{1}{a-2}$

267. $-\frac{3}{a}+\frac{3}{-a}$

268. $\frac{1}{y-x}+\frac{x}{(x-y)^2}$

269. $\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{y}{y^2-x^2}$

270. $\frac{a-b}{c-d}-\frac{b-a}{d-c}$

271. $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-x)(x-z)}$

272. $\frac{3}{x-b}+\frac{4b}{(x-b)^2}-\frac{5b}{(x-b)^3}$

273. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}$

274. $\frac{b+1}{b-a}+\frac{5a+3b}{a^2-b^2}+\frac{b-1}{a+b}+\frac{3}{b-a}$

275. $\frac{x-2}{x-3}-\frac{2x^2+x-13}{x^2+2x-15}+\frac{x+1}{x+5}$

276. $\frac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+b+1}{(a-b)(c-b)}+\frac{c^2+c+1}{(a-c)(b-c)}$

277. $\frac{2a-3b}{4a^2}+\frac{1}{2a-b}-\frac{a-2b}{2a^2-ab}$

278. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6}+\frac{3}{x-3}+1$

279. $\frac{2}{2a-3}-\frac{2}{3+2a}-\frac{2a+15}{4a^2-9}$

280. $\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$

281. $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

282. $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}-x+2$

283. $\dfrac{3-x}{1-3x}-\dfrac{3+x}{1+3x}-\dfrac{1-16x}{9x^2-1}$

284. $\dfrac{2}{1+x}-\left(\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

285. $\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1-x+x^2}{1+x^2}-\dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}+2$

286. $\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}-\dfrac{a-b}{(b-c)(a-c)}+$

$+\dfrac{b-c}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{a-c}{(a-b)(b-c)}$

287. $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

288. $\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right)\left(1-\dfrac{x}{1+x}\right)\left(1-x^2-\dfrac{1-x^2}{x}\right)$

289. $\dfrac{x^2-4a^2}{ax+2a^2}\times\dfrac{2a}{x-2a}$

290. $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}\times\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}$

291. $\dfrac{6x^3+6}{(x+1)^2-x}\times\dfrac{x^3-1}{x^3-3x^2}\times\dfrac{x^3+x^2}{x^4-1}$

292. $\dfrac{x^4-a^4}{x^3+a^3}\times\dfrac{a^3-x^3}{a^2-x^2}\times\dfrac{x^6-a^6}{a^2+x^2}$

293. $\dfrac{a^2+3a+9}{a^3-27}\times\dfrac{a^4-3a^2+9}{a^6+27}$

294. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\times\dfrac{2x^3y^2}{x^6-y^6}$

295. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}\times\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$

296. $\dfrac{mx}{m-x}\times\dfrac{y-x}{m(m+x)}\times\dfrac{m^2-x^2}{y^2-x^2}\times\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$

297. $\dfrac{x^2-y^2}{a+b} : \dfrac{(x+y)^2}{a^2-b^2}$

298. $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2} : \dfrac{a-b}{4a+4b}$

299. $\dfrac{a^2+ab+ax+bx}{a^2-ab-ax+bx} : \dfrac{a^2-x^2}{a^2-b^2}$

300. $\left(x-\dfrac{y^2}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) : \dfrac{x^4-y^4}{xy}$

301. $\dfrac{(x-y)(y-z)}{y-x} : \dfrac{(y-z)(x-z)}{z-x}$

302. $\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right) : \left(2x-1+\dfrac{15}{x-3}\right)$

303. $\left[1+\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2\right] : \left[1-\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2\right]$

304. $\left(\dfrac{75x^2}{y^2}+1+\dfrac{4y}{5x}\right) : \left(\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2}{5}\right)$

305. $\left(x^2-x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2} :\right)\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)$

306. $\dfrac{a^2-ab-ac}{a^2-b^2-c^2+2bc} : \left(1-\dfrac{2c}{a-b+c}\right)$

307. $\dfrac{a}{b} \times \left(a : \dfrac{b}{c} - b : \dfrac{a}{c}\right) : \dfrac{c}{b}$

308. $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{ab-b^2-bc} \times \dfrac{c}{a^2+ab-ac} : \dfrac{ac-bc+c^2}{a^2-(b-c)^2}$

309. $\dfrac{3x-6x^2}{1-9x+18x^2} \times \dfrac{1-8x^3}{(1-2x)^2} : \dfrac{3+6x+12x^2}{1+3x-18x^2}$

310. $\dfrac{a-2a^2}{4a^2-1} \times \dfrac{1+4a+4a^2}{3a} : \dfrac{2+2a-4a^2}{6a-6a^2}$

311. $\left(\dfrac{m^2-2mn}{1-n^2}+\dfrac{1}{m}-\dfrac{m^2}{1-n^2}\right) : \dfrac{1-n(2m^2+n)}{m(1+n)}$

312. $\left(\dfrac{x^2-x-20}{x^2-x-2} \times \dfrac{x^2+x}{x^2-6x+5}\right) : \left(\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-3x+2} \times \dfrac{x^2}{x+3}\right)$

Simplificar y efectuar las operaciones que se indican:

313. $$\frac{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{a^2}}$$

314. $$\frac{\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}}$$

315. $$\frac{a+x-\frac{a^3}{a^2-ax+x^2}}{a+x-\frac{x^3}{a^2-ax+x^2}}$$

316. $$\frac{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}}{\frac{a^2+4a-1}{a^2-1}-1}$$

317. $$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$$

318. $$\frac{\left(x^2+\frac{y^4}{x^4-y^2}\right)(x^2+y^2)}{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}$$

319. $$\frac{\frac{a^2+b^2}{b}+a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}:\frac{b^3-a^3}{a^2-b^2}$$

320. $$\frac{\frac{a+b}{a-b}\times\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+b^2}{a-b}\times\frac{a-b}{a^2-b^2}}\times\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

321. $$\left(\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}}{1+\frac{1}{ab}}+\frac{b+1}{b+\frac{1}{a}}-1\right):\left(\frac{1+\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{a}}-\frac{ab+a}{ab+1}+1\right)$$

322. $$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}}\times\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\times$$

$$\times\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}:\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)^2+\left(1+\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

5. Radicales

26. Radicales numéricos y expresiones irracionales. — Se da el nombre de *radical* a la raíz indicada de un número o de una expresión algebraica.

EJEMPLOS:

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt[5]{7}, \qquad \sqrt[3]{2\,ab}, \qquad \sqrt{x^2-y^2}, \qquad \sqrt{\frac{3\,x^2-x}{2\,a+b}}$$

Radicando es la expresión o número cuya raíz se pide.

Signo radical es el símbolo $\sqrt{\ }$.

Cuando el radicando consta de números solamente, tendremos un *radical numérico*.

Los *radicales* que tienen raíz exacta se llaman *racionales*.

Expresiones irracionales son aquellas cuya raíz indicada no es exacta; a ellas generalmente se les llama *radicales*.

Si el índice es par y el radicando es negativo, el radical carece de valor numérico y queda excluido por ahora de nuestro estudio.

EJEMPLOS. — Carecen de valor numérico los radicales numéricos

$$\sqrt{-2}, \qquad \sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[2n]{-13},$$

ya que no existe ningún número que elevado a una potencia par dé un número negativo.

Asimismo, carecen de valor numérico las expresiones irracionales

$$3\,a\sqrt{-2\,x^2}, \qquad \sqrt[4]{-a^2-b^2}, \qquad \sqrt{-(1+x)^2}$$

pues el radicando en ellas es siempre negativo, cualesquiera que sean los valores que demos a las letras.

27. Valor aritmético de un radical. — Sabemos que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas opuestas, una positiva y otra negativa. Al valor positivo se le llama *valor aritmético* del radical.

En general, daremos la siguiente definición: *Valor aritmético de un radical es el valor positivo del mismo, cuando existe.*

EJEMPLO:

El valor aritmético de $\sqrt{3}$ es $+1'732...$

En cambio, los radicales

$\sqrt[3]{-27}$ (raíz impar de un número negativo) y $\sqrt{-4}$ (raíz par de un número negativo) no tienen valor aritmético.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. — Al estudiar los radicales en los párrafos siguientes, *entenderemos siempre que nos referimos a sus valores aritméticos.*

28. Raíces de un producto y de un cociente. — *La raíz enésima de un* PRODUCTO *es igual al producto de las raíces enésimas de los factores.*

En efecto: para demostrar que

$$\sqrt[n]{a \times b \times c} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \qquad [1]$$

basta ver que

$$(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n = a \times b \times c$$

EJEMPLO:

$$\sqrt[3]{27 \times 343 \times 729} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{343} \times \sqrt[3]{729} = 3 \times 7 \times 9 = 189$$

La igualdad [1], leída en los dos sentidos, nos servirá para transformar en producto de raíces la raíz de un producto, y para reducir a un solo radical el producto de radicales de igual índice.

O sea, que *para multiplicar varios radicales que tienen el mismo índice, se extrae la raíz, del mismo índice, del producto de los radicandos.*

La raíz enésima de un COCIENTE *es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y del divisor.* Así,

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \qquad [2]$$

puesto que

$$(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n = a : b$$

EJEMPLO:

$$\sqrt{441 : 49} = \sqrt{441} : \sqrt{49} = 21 : 7 = 3$$

La igualdad [2], leída en los dos sentidos, sirve para transformar en cociente de raíces la raíz de un cociente, y para reducir a un solo radical el cociente de dos radicales de igual índice.

Es decir, que *para dividir varios radicales que tienen el mismo índice, se extrae la raíz, del mismo índice, del cociente de los radicandos.*

29. Potencia de una raíz y raíz de una potencia. — *Para elevar una raíz a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia.* Así, tendremos:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad [3]$$

En efecto: como caso particular del producto de radicales, se tiene:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \overbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \ldots \times \sqrt[n]{a}}^{(m \text{ veces})} = \sqrt[n]{a \times a \times a \times \ldots \times a} = \sqrt[n]{a^m}$$

EJEMPLO:

$$(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Recíprocamente: Si leemos en sentido inverso la igualdad [3], podremos enunciar: *Para hallar la raíz de una potencia, puede hacerse calculando la raíz de la base, y elevando luego el resultado a la potencia dada.*

EJEMPLO:

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

30. Raíz de una raíz — La *raíz* m-*ésima de la raíz* n-*ésima de un número es igual a la raíz* mn-*ésima de dicho número.*

O sea, que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad [4]$$

En efecto: si elevamos los dos miembros de esta igualdad a la potencia *mn*, resulta en los dos el mismo valor *a*.

El primero da, sucesivamente:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$$

y el segundo:

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a$$

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$; 2.º $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

3.º $\sqrt{\sqrt{\sqrt{1.679.616}}} = \sqrt[8]{1.679.616} = \sqrt[8]{2^8 \times 3^8} = 2 \times 3 = 6$

EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE ÍNDICE COMPUESTO. — También puede interesar leer la igualdad [4] en sentido inverso, y tendríamos la siguiente regla:

Para extraer la raíz mn-*ésima de un número, puede procederse calculando la raíz* m-*ésima de ese número, y luego, del resultado, se halla la raíz* n-*ésima.*

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt[4]{6.561} = \sqrt{\sqrt{6.561}} = \sqrt{81} = 9$

2.º $\sqrt[6]{4.096} = \sqrt[3]{\sqrt{4.096}} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.º $\sqrt[8]{6.561} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6.561}}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$

De este modo vemos que es posible, mediante una extracción sucesiva de raíces cuadradas y cúbicas, obtener una raíz de índice $2^m \times 3^n$, es decir, que contenga solamente los factores 2 y 3.

31. Propiedad fundamental de los radicales. — *El valor de un radical no varía si se multiplican por un mismo número el índice de la raíz y el exponente del radicando.*

Es decir, que

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pn]{a^{qn}} \qquad [5]$$

En efecto: si elevamos a la potencia *pn* los dos miembros de esta igualdad, obtendremos el mismo valor.

El primero da, sucesivamente:

$$(\sqrt[p]{a^q})^{pn} = [(\sqrt[p]{a^q})^p]^n = (a^q)^n = a^{qn}$$

y el segundo:

$$(\sqrt[pn]{a^{qn}})^{pn} = a^{qn}$$

Luego, es cierta la propiedad enunciada.

Si el radicando es un monomio cuyas letras tienen diversos exponentes, habrá que multiplicar todos ellos, junto con el del coeficiente, por el que se ha multiplicado al índice.

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt{3\,a} = \sqrt[4]{(3\,a)^2} = \sqrt[4]{9\,a^2}$

2.º $\sqrt[3]{2\,a^2(x+y)} = \sqrt[6]{2^2a^4(x+y)^2} = \sqrt[6]{4\,a^4(x+y)^2}$

La igualdad [5] puede escribirse así:

$$\sqrt[pn]{a^{qn}} = \sqrt[p]{a^q}$$

lo que prueba que *el valor de un radical no se altera al dividir exactamente por un mismo número el índice de la raíz y el exponente del radicando.*

Si el radicando es un monomio cuyas letras tienen diversos exponentes, se pueden dividir todos ellos (incluido el del coeficiente) y el índice de la raíz por su máximo común divisor.

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt{6}$

2.º $\sqrt[10]{243} = \sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$

3.º $\sqrt[12]{16\,a^6b^2c^4} = \sqrt[6]{4\,a^3bc^2}$

4.º $\sqrt[6]{9\,a^2(x^2+1)^4} = \sqrt[3]{3\,a\,(x^2+1)^2}$

32. Extracción de factores de un radical. — Como la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores, si alguno de los factores del radicando tiene por exponente un número que sea múltiplo del índice, podremos sacar del radical a dicho factor, con sólo dividir su exponente por el índice.

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt{72} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$

2.º $5\sqrt{63} = 5\sqrt{7 \times 9} = 15\sqrt{7}$

3.º $\sqrt[3]{81\,a^9(x+y)^3} = 3\,a^3(x+y)\sqrt[3]{3}$

4.º $\sqrt{8\,a^4b^2 + 16\,a^4b^4} = 2\,a^2b\sqrt{2\,(1+2\,b^2)}$

Se reconoce fácilmente cuándo una letra puede sacarse del radical, ya que su exponente ha de ser múltiplo del índice; pero no sucede lo mismo con los números en algunos casos. Será preciso entonces descomponerlos en factores primos.

EJEMPLOS:

1.º $\sqrt{31.104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^6 \times 2 \times 3^4 \times 3} = 2^3 \times 3^2\sqrt{2 \times 3} = 72\sqrt{6}$

2.º $\sqrt[3]{151.875\, a^2b^7} = \sqrt[3]{3^5 \times 5^4a^2b^7} = 3 \times 5\, b^2\sqrt[3]{3^2 \times 5\, a^2b} = 15\, b^2\sqrt[3]{45\, a^2b}$

INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UN RADICAL. — Si para sacar factores de un radical basta extraer su raíz, recíprocamente, para introducirlos habrá que elevarlos a la potencia que indica el índice.

EJEMPLOS:

1.º $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$; 2.º $2\, a^2b\sqrt[3]{2\, ac} = \sqrt[3]{16\, a^7b^3c}$

EJERCICIOS

323. ¿Cuál es el valor aritmético de los siguientes radicales?

$$\sqrt{2};\quad \sqrt{-5};\quad \sqrt[3]{-0'064};\quad \sqrt[3]{0'064};\quad \sqrt[6]{729};\quad \sqrt[6]{-729}$$

324. Calcular las siguientes raíces, empleando la regla dada en el párrafo 28:

$$\sqrt[3]{8 \times 27 \times 64};\quad \sqrt[5]{243 \times 32 \times 0'00001};\quad \sqrt{49 \times 121 \times 169}$$

325. Calcular las siguientes raíces, empleando la regla dada en el párrafo 28:

$$\sqrt{25 : 0'0001};\quad \sqrt[3]{8 : 0'064};\quad \sqrt[4]{20.736 : 256};\quad \sqrt[5]{537.824 : 32}$$

326. Calcular las siguientes potencias, empleando la regla dada en el párrafo 29:

$$(\sqrt{49})^3;\quad (\sqrt[3]{512})^2;\quad (\sqrt[4]{16})^2;\quad (\sqrt[5]{0'00032})^3;\quad (\sqrt{0'01})^7$$

327. Calcular las siguientes raíces, empleando la regla dada en el párrafo 29:

$$\sqrt{49^3};\quad \sqrt[3]{0'064^2};\quad \sqrt[3]{2.197^4};\quad \sqrt{1.521^3};\quad \sqrt[4]{6.561^3}$$

328. Calcular las siguientes raíces de raíces, según la regla dada en el párrafo 30:

$$\sqrt{\sqrt{16}};\quad \sqrt{\sqrt{2.401}};\quad \sqrt{\sqrt[3]{729}};\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}};\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{531.441}}}$$

329. Calcular las siguientes raíces por medio de raíces sucesivas:

$$\sqrt[4]{14.641};\quad \sqrt[6]{117.649};\quad \sqrt[8]{815.730.721};\quad \sqrt[12]{4.096};\quad \sqrt[18]{262.144}$$

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

330. $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4-\sqrt{25a^8}}}$

331. $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

332. $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$

333. $\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}}\right)^{32}$

Introducir el coeficiente en el radical:

334. $5\sqrt{a}$ $\quad 3a\sqrt{\dfrac{1}{27a^3}}$ $\quad x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

$a^2\sqrt[3]{3}$ $\quad x^3\sqrt{\dfrac{5}{x^3}}$ $\quad 3m\sqrt{5m}$

$(3a-1)^2\sqrt{3a-1}$ $\quad 2(a-b)\sqrt{a-b}$ $\quad \dfrac{a}{c}\sqrt{ac}$

$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{16}{5}}$ $\quad \dfrac{1-a}{a}\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ $\quad \dfrac{8}{9}\sqrt{\dfrac{9}{8}}$

$\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ $\quad \dfrac{m}{a+1}\sqrt[3]{\dfrac{m^2}{(a+1)^2}}$ $\quad (m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}$

6. Operaciones con radicales

33. Radicales semejantes. — *Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando.* Pueden diferir únicamente en el coeficiente que les multiplica.

EJEMPLOS:

1.° $\sqrt{x-1},\quad 3\sqrt{x-1},\quad 2a\sqrt{x-1}$

2.° Son también semejantes:

$$4\sqrt[3]{81\,a^3x},\quad 2\sqrt[3]{192\,x},\quad \sqrt[6]{9\,x^2}$$

ya que, simplificando, se transforman, respectivamente, en

$$12\,a\sqrt[3]{3\,x},\quad 8\sqrt[3]{3\,x},\quad \sqrt[3]{3\,x}$$

3.° Son asimismo semejantes:

$$\sqrt{45},\quad 3\sqrt{20},\quad 2\sqrt{\tfrac{1}{5}}$$

pues, equivalen, respectivamente, a

$$3\sqrt{5},\quad 6\sqrt{5},\quad \tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

34. Adición y sustracción de radicales. — La suma algebraica de varios radicales semejantes puede expresarse *sacando el radical como factor común de la suma algebraica de los coeficientes.* Si no son semejantes, se deja indicada la operación.

EJEMPLOS:

1.° $y^2\sqrt[3]{x^2y}-2y\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{x^2y}=(y^2-2y+1)\sqrt[3]{x^2y}=(y-1)^2\sqrt[3]{x^2y}$

2.° $$\sqrt[3]{54}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{250}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{128}{25}}-\sqrt[3]{6\,\frac{3}{4}}=$$

$$=3\sqrt[3]{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+5\sqrt[3]{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}=$$

$$=\left(3+5-\frac{3}{2}\right)\sqrt[3]{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\right)\sqrt{2}=\frac{13}{2}\sqrt[3]{2}+\frac{21}{20}\sqrt{2}$$

35. Reducción de radicales a índice común. — Como aplicación práctica de la propiedad fundamental de los radicales (31), podemos enunciar:

Para reducir varios radicales a índice común, se multiplica el índice y los exponentes de cada radical por los índices de los demás.

EJEMPLO. — Reducir los radicales $\sqrt[3]{2x^2}$, $\sqrt[4]{3y}$ a índice común.

Se tiene:

$$\sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3\times 4]{2^4 x^{2\times 4}} = \sqrt[12]{16x^8}; \qquad \sqrt[4]{3y} = \sqrt[4\times 3]{3^3 y^3} = \sqrt[12]{27y^3}$$

Para reducir varios radicales al *mínimo índice común:*

1.° *Se halla el mínimo común múltiplo de los índices, y éste será el índice común.*

2.° *Se multiplican los exponentes de cada radicando por el cociente de dividir el índice común por el índice respectivo.*

EJEMPLO. — Reducir los siguientes radicales al mínimo índice común:

$$\sqrt{2x}, \qquad \sqrt[3]{3(x-1)}, \qquad \sqrt[4]{5x^3}$$

Como m. c. m. (2, 3 y 4) = 12, y 12 : 2 = 6, 12 : 3 = 4, 12 : 4 = 3, los radicales propuestos se convierten en

$$\sqrt[12]{64x^6}, \qquad \sqrt[12]{81(x-1)^4}, \qquad \sqrt[12]{125x^9}$$

36. Multiplicación y división de radicales. — Según vimos en el párrafo 28, *para multiplicar o dividir varios radicales, cuando tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos y se afecta al resultado de la raíz del mismo índice.*

Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen a índice común y se aplica la regla anterior.

EJEMPLOS:

1.° $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{64} \times \sqrt[12]{81} \times \sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{648.000}$

2.° $\sqrt{\frac{x}{y}} \times \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}} \times \sqrt[6]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[6]{\frac{x^3y^2}{y^3x^2}} = \sqrt[6]{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\sqrt[6]{xy^5}$

3.° $\sqrt{\frac{3}{4}} : \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} : \frac{1}{4}} = \sqrt{3}$

4.° $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^4} : \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^4 : a^3} = \sqrt[6]{a}$

37. Racionalización de denominadores. — Se presentan con frecuencia en el cálculo expresiones fraccionarias en cuyo denominador hay una o varias raíces cuadradas no exactas. Los cálculos numéricos resultan más fáciles cuando se transforman dichas fracciones en otras equivalentes cuyo divisor o denominador sea un número entero. La operación por la cual se logra esto se denomina *racionalización de denominadores*. He aquí los casos más sencillos:

1.° *Denominador monomio.* Se multiplica el numerador y el denominador por la raíz que aparece en el denominador.

Es conveniente simplificar antes los radicales, cuando haya lugar a ello, sacando fuera del radical los factores que sea posible.

EJEMPLOS:

1.° $\dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

2.° $\dfrac{3}{5\sqrt{18}} = \dfrac{3}{5\sqrt{9 \times 2}} = \dfrac{3}{15\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{15\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{30} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

3.° $\dfrac{6}{3\sqrt{5\,xy}} = \dfrac{6\sqrt{5\,xy}}{3\sqrt{5\,xy} \times \sqrt{5\,xy}} = \dfrac{6\sqrt{5\,xy}}{15\,xy} = \dfrac{2\sqrt{5\,xy}}{5\,xy}$

El denominador de la fracción puede ser una raíz de índice cualquiera m. En este caso se multiplicarán los dos términos por la raíz m-ésima de una expresión cuyo producto por el radicando del denominador sea potencia m-ésima perfecta.

EJEMPLO:

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{6^2}}{2\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6^2}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt[3]{6^2}}{12} = \frac{\sqrt[6]{5^3 \times 6^4}}{12}$$

En general, podremos escribir para este caso:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n} \times \sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$$

2.° *Denominador binomio.* Se multiplica el numerador y el denominador por el binomio *conjugado* del denominador, el cual se obtiene cambiando el signo de uno de los términos. Así, el conjugado de $a + \sqrt{b}$ es $a - \sqrt{b}$, o bien $-a + \sqrt{b}$.

Al operar de este modo, resultará en el denominador una

$$suma \times diferencia = diferencia\ de\ cuadrados$$

con lo que desaparecerán las raíces cuadradas.

EJEMPLOS:

1.° $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$

2.° $\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{(5\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{20-7\sqrt{6}+3}{4\cdot 2-3} = \dfrac{23-7\sqrt{6}}{5}$

38. Simplificación de radicales. — Simplificar un radical es escribirlo en la forma más sencilla, para lo cual se han de practicar en él las operaciones siguientes:

1.ª *Hacer que el índice del radical y los exponentes del radicando no tengan ningún divisor común, es decir, sean primos entre sí.*

Esto se logra dividiendo el índice y los exponentes por su m. c. d.

EJEMPLOS:

1.° $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

2.° $\sqrt[8]{64\,a^4b^6c^2} = \sqrt[8]{(2^3a^2b^3c)^2} = \sqrt[4]{8\,a^2b^3c}$

2.ª *Sacar del radical todos los factores que se puedan.*

EJEMPLOS:

1.° $\sqrt{27\,a^3} = \sqrt{9\,a^2} \times \sqrt{3\,a} = 3\,a\sqrt{3\,a}$

2.° $\frac{1}{4}\sqrt{128} = \frac{1}{4}\sqrt{64 \times 2} = \frac{1}{4} \times 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

3.° $\sqrt[3]{27\,x^8 - 108\,x^6y^2} = \sqrt[3]{27\,x^6\,(x^2-4\,y^2)} = 3\,x^2\sqrt[3]{x^2-4\,y^2}$

3.ª *Hacer que el radicando no contenga ninguna fracción.*

Esto se consigue multiplicando los dos términos de las fracciones que hubiere por un mismo número, elegido de tal modo que, al multiplicar,

resulte en el denominador una potencia perfecta del grado que expresa el índice del radical.

1.° $\sqrt{\frac{3}{5}a^3} = \sqrt{\frac{3}{5} \times \frac{5}{5}a^3} = \sqrt{\frac{15}{25}a^3} = \sqrt{\frac{1}{25} \times 15\,a^3} = \frac{1}{5}a\sqrt{15\,a}$

2.° $\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \sqrt[3]{\frac{16}{25} \times \frac{5}{5}} = \sqrt[3]{\frac{80}{125}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125} \times 10} = \frac{2}{5}\sqrt[3]{10}$

3.° $\sqrt{\frac{5}{7\,x}} = \sqrt{\frac{5}{7\,x} \times \frac{7\,x}{7\,x}} = \sqrt{\frac{35\,x}{49\,x^2}} = \sqrt{\frac{1}{49\,x^2} \times 35\,x} = \frac{1}{7\,x}\sqrt{35\,x}$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes adiciones y sustracciones de radicales:

335. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

336. $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45}$

337. $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

338. $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135}$

339. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

340. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}$

341. $\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2}$

342. $3\sqrt{20} + 12\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$

343. $7\sqrt{108} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{27}$

344. $2\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 7\sqrt[3]{56}$

345. $2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27}$

346. $\sqrt{32} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

347. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{6}}$

348. $3\sqrt{\frac{21}{2}} - 4\sqrt{\frac{6}{7}} + 5\sqrt{\frac{3}{14}}$

349. $3\sqrt[3]{\frac{2\,x}{9}} - 2\sqrt[3]{\frac{3\,x}{4}} + 5\sqrt[3]{\frac{6\,x}{125}}$

350. $\sqrt{18\,y} - \sqrt{\frac{y}{2}} + \sqrt{\frac{y}{8}}$

351. $\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{1}{2\,x}}$

352. $\sqrt{\frac{2\,a}{b}} - \sqrt{\frac{2\,b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{2\,b}}$

353. $\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{4\,x+8} - \sqrt{x^3+2\,x^2}$

354. $\sqrt{a^2m - a^2n} + \sqrt[4]{(m-n)^2b^4} + \sqrt[6]{(m-n)^3c^6}$

355. $\frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}} - \frac{b^2d}{a}\sqrt{\frac{4\,a^4c}{b^2d}} + \frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}}$

356. $\frac{b}{0'3}\sqrt{\frac{0'18\,a}{b^2}} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{18\,b^2}{a}} + 2\,c\sqrt{\frac{2\,a}{c^2}} - \frac{2}{ac^2}\sqrt{\frac{a^3c^4}{0'125}}$

357. $(x-y)\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{9\,x^2-9\,y^2} + \frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{25\,xy^2-2\,y^3}{x+y}}$

358. $9\,a^2\sqrt[3]{b^2c} + 5\,a^3\sqrt[4]{bc^2} + a^3\sqrt[3]{b^2c} - 2\,a^3\sqrt[4]{bc^2} - (a^2\sqrt[3]{b^2c} - 4\,a^2\sqrt[4]{bc^2})$

359. $(\sqrt[3]{24\,a} + 2\sqrt[3]{81\,a} - \sqrt[3]{192\,a}) - (5\sqrt[3]{3\,a} - \sqrt[3]{1.029\,a} + 2\sqrt[3]{24\,a}) + (3\sqrt[3]{375\,a} - 7\sqrt[3]{192\,a})$

Reducir a índice común los radicales siguientes:

NOTA. — Cuando no figura el signo radical, puede suponerse uno con índice igual a la unidad.

360. $\sqrt[3]{n^2}$, $\sqrt[4]{n^3}$, $\sqrt[6]{n^5}$

361. $\sqrt{a}$, $\sqrt[6]{b}$, $\sqrt[4]{c}$, $\sqrt[10]{d}$

362. $\sqrt[3]{5\,y^2z}$, $\sqrt{\frac{1}{2}yz}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{3}y^3}$

363. $(a+b)^2$, $\sqrt[3]{a^2}$

364. $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{2\,x}$, $\sqrt[4]{5\,a^3}$

365. $\sqrt{\frac{4}{a}}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{b^2}}$, $\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$, a

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

366. $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{7}$

367. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{a}$

368. $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} \times \sqrt[6]{x}$

369. $3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

370. $(4\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{3})\,3\sqrt{3}$

371. $(\sqrt{a}+1)^2$

372. $\sqrt{a^3b} \times \sqrt[3]{2\,a^2b^2} \times ab$

373. $(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[5]{b^2})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[5]{b^2})$

374. $(2 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$

375. $\sqrt[3]{2\,a^2} \times 3\sqrt[4]{a^3} \times 5\sqrt[6]{16\,a^5}$

376. $\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[3]{2\,a^6b^7} \times \sqrt[7]{\frac{2}{3}\,a^3bx^2}$

377. $\sqrt[3]{x-a} \times \sqrt[3]{x^2+ax+a^2} \times \sqrt[3]{x^3+a^3}$

378. $(a+b+\sqrt{a^2+b^2})(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$

379. $\sqrt{12} : \sqrt{18}$

380. $\sqrt{12} : \sqrt[3]{12}$

381. $\sqrt[3]{2a} : \sqrt[3]{\dfrac{1}{4a^2}}$

382. $\sqrt[3]{27a^4b^5c^6} : \dfrac{1}{9}\sqrt{9a^2b^4c^5}$

383. $\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} : \dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$

384. $\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}} : \sqrt[8]{a}}{\dfrac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[9]{a}}{\sqrt{a}}}$

385. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} + 7\sqrt[4]{4}) : 2\sqrt{2}$

386. $(\sqrt{162a} - \sqrt[4]{64a^2} + \sqrt{288a}) : 3\sqrt[4]{2a^2}$

387. $(5\sqrt[3]{9x^3} - 3\sqrt{3xy} + 2\sqrt[4]{27x^2}) : \sqrt[6]{3x}$

388. $\dfrac{\sqrt{ab} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^2b^2}}{\sqrt[6]{a^5} \times \sqrt{b} \times \sqrt[5]{a^3b^3}} : \dfrac{\sqrt[10]{a^3b^4}}{\sqrt[15]{a^{12}b^{14}}}$

Racionalizar los denominadores de las siguientes fracciones:

389. $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$

390. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

391. $\dfrac{3x^2y}{\sqrt[5]{xy^3}}$

392. $\dfrac{3\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$

393. $\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

394. $\dfrac{\sqrt{24} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$

395. $\dfrac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

396. $\dfrac{\sqrt{8} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}}$

397. $\dfrac{\sqrt{a}}{2 - \sqrt{a}}$

398. $\dfrac{1}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}$

399. $\dfrac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}$

400. $\dfrac{6\sqrt{2} + 5\sqrt{7}}{5\sqrt{2} - 6\sqrt{7}}$

401. $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

402. $\dfrac{\sqrt{a+b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{c}}$

403. $\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$

404. $\dfrac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$

405. $\dfrac{(4 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(4 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{3 + \sqrt{6}}$

406. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

Simplificar los siguientes radicales:

407. $\sqrt{18};\quad \sqrt{12};\quad \sqrt{27};\quad \sqrt{200};\quad \sqrt{72}$

408. $\sqrt{150};\quad \sqrt{128};\quad 3\sqrt{150};\quad \sqrt{147};\quad \sqrt{288}$

409. $\sqrt[3]{250};\quad \sqrt[3]{108};\quad \sqrt[3]{432};\quad \sqrt[3]{625};\quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{108}$

410. $\sqrt{\frac{5}{9}};\quad \sqrt[3]{\frac{3}{5}};\quad \sqrt{\frac{4}{45}};\quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\quad \sqrt[3]{1\frac{1}{3}}$

411. $\sqrt{3\,m^5n};\quad \sqrt{8\,x^2y^7};\quad \frac{3}{4}\sqrt{32\,x^2yz};\quad \sqrt[3]{135\,a^5x^2}$

412. $\sqrt[3]{108\,x^4y^3};\quad \sqrt[5]{243\,x^3y};\quad \sqrt[p]{x^{a+p}y^{2p}};\quad \sqrt[n]{x^{3n}y^{2n+5}}$

413. $\sqrt{(a-b)^6\,(a+b)^2\,(c+d)};\quad \sqrt[4]{81\,a^9\,(x+y)^4};\quad \sqrt[5]{32\,x^3\,(x^2-a^2)^5}$

414. $\sqrt{x^2y+2\,xy+y};\quad \sqrt[3]{64\,x^5-64\,x^3y^2};\quad \sqrt{(x^2-4\,y^2)\,(x+2\,y)}$

415. $\sqrt{p^2+2\,p^2\sqrt{10}};\quad \sqrt{18+9\sqrt{2}};\quad \sqrt{a^4+a^2\sqrt{5}}$

416. $\sqrt[3]{250-125\sqrt{5}};\quad \frac{5}{8}\sqrt[3]{24-8\sqrt{5}};\quad \sqrt[1]{a^2-\frac{1}{3}\,a^2\sqrt{2}}$

417. $\sqrt{a^3+2\,a^2x+ax^2};\quad \sqrt[4]{8\,x^4y-24\,x^3y^2+24\,x^2y^3-8\,xy^4}$

418. $\sqrt{\frac{L^2+L^2\sqrt{3}}{2}};\quad \sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}};\quad \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{bc}};\quad b\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

419. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^5}{2\,a^2b^3c}};\quad \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}};\quad \frac{x+y}{x-y}\sqrt{\frac{9\,ax^2-18\,axy+9\,ay^2}{x^2+2\,xy+y^2}}$

7. Potenciación de exponente racional

39. Potencia de exponente entero negativo. — Sabemos que para dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes. Así,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Cuando el exponente del dividendo es *menor* que el del divisor, la fórmula anterior nos daría, por ejemplo:

$$\frac{a^3}{a^7} = a^{-4}; \qquad \frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{-n}$$

Pero una potencia de exponente negativo no tiene sentido, pues no podemos entender lo que sea repetir un número a menos n veces como factor. Ahora bien: simplificando las fracciones precedentes, resulta:

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}; \qquad \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}$$

Por tanto, parece natural adoptar la siguiente representación para las potencias de exponente negativo:

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4}; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Es decir:

> ***Una potencia de exponente negativo es igual a la unidad dividida por una potencia de la misma base con el exponente cambiado de signo.***

EJEMPLOS:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}; \qquad 10^{-2} = 0'01; \qquad \left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{4}\right)^{2} = \frac{25}{16}$$

$$0'1^{-3} = 1.000; \qquad \left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} = -\frac{27}{8}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}$$

APLICACIÓN. — Como consecuencia del significado que hemos atribuido a las potencias de exponente negativo, podremos representar una expresión fraccionaria en forma de expresión entera.

EJEMPLOS:

1.º $\dfrac{n}{5\,a^2bc^3} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c^3} \times n = 5^{-1}a^{-2}b^{-1}c^{-3}n$

2.º $\dfrac{a-b}{x+y} = (a-b) \times \dfrac{1}{x+y} = (a-b)\,(x+y)^{-1}$

40. Potencia de exponente cero. — Si dividimos dos potencias de la misma base y el mismo exponente obtenemos, al aplicar la regla de la diferencia de exponentes, una potencia de exponente cero:

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^\circ; \qquad \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^\circ$$

Una potencia de exponente cero no tiene sentido, porque no tiene sentido repetir la base como factor cero veces, pero vamos a ver que es muy racional atribuirle cierto valor.

Si dividimos dos potencias de la misma base y el mismo exponente, el cociente es evidentemente igual a la unidad:

$$\frac{5^3}{5^3} = 1; \qquad \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Por tanto, parece natural adoptar la siguiente representación para las potencias de exponnete cero:

$$5^0 = 1; \qquad a^0 = 1$$

Es decir:

Una potencia de exponente cero es igual a uno.

EJEMPLOS:

$$3^0 = 1; \qquad (\tfrac{1}{5})^0 = 1; \qquad x^0 = 1; \qquad (a-b)^0 = 1$$

41. Potencia de exponente fraccionario. — La raíz n-ésima de una potencia cuyo exponente es múltiplo de n se obtiene dividiendo el exponente por n.

O sea que tendremos:

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3$$

Cuando el exponente m de a no es divisible por el índice n, la expresión $a^{\frac{m}{n}}$ no tiene sentido. Sin embargo, se ha *convenido* en que la notación $a^{\frac{m}{n}}$ represente en este caso el valor del radical $\sqrt[n]{a^m}$.

Por convención, pues, podemos escribir que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

igualdad que equivale a admitir la siguiente definición:

Todo número afectado de exponente fraccionario representa un radical que tiene por índice el denominador de la fracción y por radicando, la base de la potencia con exponente igual al numerador.

Así, por ejemplo,

$\sqrt[3]{5^2}$ se expresa también por $5^{\frac{2}{3}}$

y viceversa, con

$5^{\frac{2}{3}}$ queremos indicar $\sqrt[3]{5^2}$

Merced a esta nueva notación, las operaciones con radicales pueden hacerse utilizando las reglas estudiadas para el cálculo con potencias de exponente entero.

42. Permanencia de las leyes del cálculo con exponentes racionales. — Para que los anteriores convenios, expresados por las fórmulas

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

queden plenamente justificados, es necesario probar que las leyes del cálculo con potencias de exponente natural (entero positivo), siguen siendo válidas para el caso de ser negativo, nulo o fraccionario el exponente. Estas leyes se refieren a tres puntos.

1.° Al producto de potencias de igual base.
2.° Al cociente de potencias de igual base.
3.° A la potencia de otra potencia.

I. PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — *El producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.*

Esta regla está demostrada para exponentes enteros positivos. Supongamos ahora que se trata de exponentes racionales cualesquiera.

Primer caso: 1) Los exponentes son todos negativos (el signo lo ponemos explícito); 2) los exponentes son todos fraccionarios.

Tenemos, en efecto, las siguientes igualdades, que prueban la regla enunciada:

$$1)\quad a^{-m}\cdot a^{-n}\cdot a^{-p}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{1}{a^{m+n+p}}=$$

$$=a^{-(m+n+p)}=a^{-m-n-p}$$

$$2)\quad a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Segundo caso: 1) Los exponentes son unos positivos y otros negativos; 2) los exponentes son unos enteros y otros fraccionarios.

Se tiene:

$$1)\quad a^{-m}\cdot a^{n}\cdot a^{-p}=\frac{1}{a^m}\cdot a^n\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{a^n}{a^{m+p}}=a^{n-(m+p)}=a^{n-m-p}$$

Si alguno de los exponentes es cero, la comprobación es inmediata, pues tendríamos:

$$a^{-m}\cdot a^n\cdot a^0=a^{-m}\cdot a^n\cdot 1=a^{-m+n}=a^{-m+n+0}$$

Lo mismo sucede en los demás casos, y por ello nos referimos solamente a exponentes no nulos.

$$2)\quad a^{\frac{m}{n}}\cdot a^p=\sqrt[n]{a^m}\cdot a^p=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{pn}}=\sqrt[n]{a^{m+pn}}=a^{\frac{m+pn}{n}}=a^{\frac{m}{n}+p}$$

II. COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — *El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.*

Demostrada esta regla para exponentes naturales, veamos si se cumple para exponentes racionales.

Primer caso: 1) Son negativos los exponentes del dividendo y divisor; 2) son fraccionarios los exponentes del dividendo y divisor.

En efecto: las siguientes igualdades prueban la verdad de la regla enunciada:

1) $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

Segundo caso: 1) Solamente es negativo el exponente del dividendo; 2) solamente es fraccionario el exponente del dividendo.

Tenemos:

1) $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$

2) $a^{\frac{m}{n}} : a^p = \sqrt[n]{a^m} : a^p = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{a^{pn}} = \sqrt[n]{a^{m-pn}} = a^{\frac{m-pn}{n}} = a^{\frac{m}{n}-p}$

Tercer caso: 1) Solamente es negativo el exponente del divisor; 2) solamente es fraccionario el exponente del divisor.

1) $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$

2) $a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^m : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq-p}} = a^{\frac{mq-p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}$

III. POTENCIA DE OTRA POTENCIA. — *El resultado de elevar una potencia a otra es una potencia de igual base que la primera, que tiene por exponente el producto de los exponentes.*

Esta regla está demostrada cuando los exponentes son números naturales. Para poder asegurar que se cumple para todo exponente racional, hemos de considerar los tres casos siguientes:

Primer caso: 1) Es positivo el primer exponente y negativo el segundo; 2) es entero el primer exponente y fraccionario el segundo.

$$1)\quad (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m\times(-n)}$$

$$2)\quad (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m\times\frac{p}{q}}$$

Segundo caso: 1) Es negativo el primer exponente y positivo el segundo; 2) es fraccionario el primer exponente y entero el segundo.

$$1)\quad (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)\times n}$$

$$2)\quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{n}} = a^{\frac{m}{n}\times p}$$

Tercer caso: 1) Son negativos los dos exponentes; 2) son fraccionarios los exponentes.

$$1)\quad (a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn} = a^{(-m)\times(-n)}$$

$$2)\quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}}} = \frac{1}{a^{\frac{mp}{nq}}} = a^{-\frac{mp}{nq}}$$

En RESUMEN, podemos decir: *Los exponentes negativos y fraccionarios, y por tanto los exponentes racionales, cumplen las mismas leyes del cálculo de los exponentes naturales.*

EJERCICIOS

Transformar las siguientes expresiones en otras equivalentes con todos los exponentes positivos:

420. x^{-3}; mn^{-1}; $(ab)^{-3}$; a^{-x}; 2^{-1}

421. 5^{-3}; 4^{-2}; $\left(\frac{8}{3}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

422. $x^{-2}+y^{-2}$; $(x+y)^{-2}$; $a^{-3}-b^{-3}$; $(a-b)^{-3}$; $\frac{a^{-3}}{b^{-2}}$

423. $\frac{x}{y^{-2}}$; $\frac{a^{-3}}{x^2}$; $\frac{2ab^{-1}}{3c^{-3}d}$; $\frac{2a^{-3}}{3b^{-2}}$; $\frac{a^3b^{-2}c^{-1}}{a^{-2}d^2}$

424. $\frac{(2a)^{-3}b^2}{cd^{-2}}$; $\frac{-5a^{-3}}{b^2}$; $\frac{(2x)^{-2}}{(3y)^{-2}}$; $\frac{3^{-1}a^3}{b^{-2}}$; $\frac{x^2y^{-2}z^{-3}}{a^{-2}bc^{-1}}$

425. $\frac{(m-n)^{-1}}{m+n}$; $\frac{1}{x^{-2}+y^{-2}}$; $\frac{m}{n}+\frac{n^{-1}}{m^{-1}}$; $\frac{(a+b)^{-1}}{(a-b)^{-1}}$; $\frac{m}{n^{-1}}+\frac{n}{m^{-1}}$

Escribir sin denominadores las expresiones siguientes:

426. $\frac{1}{a^3}$; $\frac{a^{-1}}{xy^2}$; $\frac{x^3m^2}{2a^{-1}b}$; $\frac{5x^{-1}y^{-2}}{3ab}$

427. $\frac{2x^2}{y}$; $\frac{a^2b^{-3}}{2^{-2}m^{-1}n^2}$; $\frac{1}{(x+y)^2}$; $2y^2+5y-2+\frac{3}{y}-\frac{5}{y^2}$

Hallar el valor de las siguientes expresiones:

428. 15^0; $\left(\frac{5}{7}\right)^0$; $2a^0b$; $(-4)^0$; -4^0

429. $(-3a)^0$; $-3a^0$; $(a+b)^0$; $(\frac{2}{3}+5b)^0$; $\frac{2}{3}+5b^0$

430. a^0-b; $9y(x+y)^0$; $\frac{1}{a^0+b^0}$; $\frac{1}{x+y^0}$; $\frac{y^0+2}{3+x^0}$

Transformar las siguientes expresiones en otras equivalentes en las que no aparezcan exponentes fraccionarios:

431. $x^{\frac{1}{2}}$; $5x^{-\frac{1}{2}}$; $(8a)^{\frac{1}{2}}$; $m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}}$; $a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{5}}$

432. $a^{\frac{2}{3}}$; $2a^{-\frac{1}{2}}$; $3x^{\frac{4}{3}}$; $(a^2+2m^2)^{\frac{1}{2}}$; $(x+y)^{\frac{2}{3}}$

Emplear exponentes fraccionarios en lugar de radicales:

433. $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{7m^3}$; $4\sqrt[7]{a^2b^3}$; $\sqrt{x^2+y^2}$; $\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^2}}$

434. $\sqrt[3]{x^3}$; $\sqrt{2a^3b^5}$; $9\sqrt[3]{x^7y^4}$; $\sqrt{(a+b)^3}$ $\sqrt[3]{m^2\sqrt{x^3}}$

Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones:

435. $16^{\frac{1}{2}}$; $9^{\frac{3}{2}}$; $-27^{\frac{1}{3}}$; $36^{\frac{3}{2}}$; $0'04^{\frac{1}{2}}$; $4x^0 - (7x)^0$

436. $25^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{1}{2}} - (-27)^{\frac{2}{3}}$; $27^{-\frac{1}{3}} - 3a^0 - 1^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{8^{-\frac{2}{3}}}$

437. $\dfrac{3^0 a + 4^{-1} a}{a^{\frac{2}{3}}}$, si $a = 64$; $\dfrac{8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} \cdot 1^{3x}}{(-32)^{\frac{1}{5}}}$

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

438.
$a^7 \cdot a^{-3}$
$x^{-2} \cdot x^{-5}$
$2m^0 \cdot (2m)^0$
$x^{2a+1} \cdot x^{3a+2}$
$y^b \cdot y^0$

439.
$x^4 : x^5$
$a^2 : a^{-5}$
$x^3 : x^{-1}$
$x^{2a} : x^a$
$x^{a+2} : x^{a-2}$

440.
$(x^5)^{-2}$
$(x^{-5})^{-2}$
$(a^2b^5)^{-3}$
$(a^{-2}b^{-3})^{-2}$
$(3m^{-1})^{-3}$

441.
$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$
$a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$
$x^0 \cdot x^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt{m^0} \cdot \sqrt[3]{m^5}$
$2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}} \cdot 5a^{-\frac{1}{2}}b$

442.
$x^{\frac{1}{3}} : x^{-\frac{2}{3}}$
$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} : ab^{-\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{3}{4}} : ax^{-\frac{1}{4}}$
$m^2 : m^{\frac{1}{2}}$
$m^{\frac{2}{3}} : m^0$

443.
$\left(3a^{\frac{1}{3}}\right)^3$
$(8a^{-1})^{\frac{1}{3}}$
$\left(9x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
$\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-6}\right)^{-\frac{1}{2}}$
$\left[(m+n)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

444. $\left(x + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) x$

445. $3x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} - 2x + 3x^{\frac{1}{2}}\right)$

446. $(a^{-2}+b^{-2})\,a^{-1}b^{-1}$

447. $\left(x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$

448. $\left(3m^{\frac{1}{2}} + 2m^{-\frac{1}{2}} - 5\right)\left(3m^{\frac{1}{2}} + 2m^{-\frac{1}{2}} + 5\right)$

449. $(a+b) : (a+b)^{\frac{1}{2}}$

450. $(x-y) : (x-y)^{-\frac{1}{2}}$

451. $(4a^2+3a-4+5a^{-1}) : 2a^{-1}$

452. $\left(9m - 6m^{\frac{1}{2}} + 12\right) : 3m^{\frac{1}{2}}$

453. $\left(a^{\frac{1}{2}} - 5 - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

8. Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

43. Formas de la ecuación de segundo grado con una incógnita. — Toda ecuación *completa* de segundo grado con una incógnita consta, después de preparada, de tres términos: uno con la incógnita elevada a la segunda potencia, otro con la incógnita al primer grado y, finalmente, un término independiente de la incógnita.

Si se escriben los términos en el primer miembro y se ordenan respecto de las potencias decrecientes de la incógnita, la ecuación tomará la *forma general*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la que a, b y c son coeficientes numéricos o literales.

En la ecuación de segundo grado puede ser nulo el coeficiente b de x, así como también el término independiente c, o ambos a la vez. En estos tres casos, la ecuación recibe el nombre de *incompleta*, y presenta, respectivamente, las formas

$$ax^2 + c = 0, \qquad ax^2 + bx = 0 \quad \text{y} \quad ax^2 = 0$$

Evidentemente, si la ecuación es de segundo grado, no podrá ser nunca nulo el coeficiente a de x^2. Además, supondremos siempre que dicho coeficiente a es positivo; si fuera negativo, se cambiará el signo de todos los términos, con lo cual obtendremos una ecuación equivalente con el coeficiente a positivo.

44. Resolución de las ecuaciones incompletas. — Aunque la resolución de las ecuaciones incompletas se deduce de las completas, sin más que suponer los coeficientes b y c, aislada o simultáneamente, iguales a cero, estudiaremos no obstante su resolución directa.

1. FORMA $ax^2 + c = 0$. — Para resolver esta ecuación, pasemos c al segundo miembro y dividamos por a los dos miembros de la ecuación resultante, con lo cual se obtiene

$$x^2 = \frac{-c}{a} \quad \text{de donde} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Es decir: siempre que el cociente $\frac{-c}{a}$ sea positivo (lo que sucederá si c en la ecuación es negativo) *la ecuación de la forma* $ax^2 + c = 0$ *tiene dos raíces iguales y de signo contrario, dadas por las fórmulas*

$$x' = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \text{y} \quad x'' = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

EJEMPLO. — Resolver la ecuación incompleta $4x^2 - 25 = 0$.

Aplicando la fórmula deducida anteriormente, resulta

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

Por consiguiente, las raíces serán

$$x' = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad x'' = -\frac{5}{2}$$

Si el cociente $\frac{-c}{a}$ es negativo, como por ahora no sabemos qué significado dar a las raíces pares de números negativos, debemos contentarnos con decir que la ecuación en ese caso *carece de raíces*.

En el curso próximo veremos la existencia de nuevos números, llamados *imaginarios*, que permiten dar significado a las raíces pares de números negativos, y diremos entonces que las raíces son, en este caso y otros similares, *imaginarias*, mientras que a las demás las llamaremos *reales*.

EJEMPLO. — Resolver la ecuación $x^2 + 9 = 0$.

Como $x = \pm\sqrt{-9}$, decimos que la ecuación dada carece de raíces, o que sus raíces son imaginarias.

II. Forma $ax^2 + bx = 0$. — Si sacamos x factor común, esta ecuación puede escribirse también así:

$$x(ax+b) = 0$$

El primer miembro es ahora un producto de dos factores, x y $ax + b$. Para que un producto se anule, debe anularse alguno de los factores; luego, en este caso, se ha de verificar que

$$\boxed{x' = 0} \quad \text{o bien} \quad ax + b = 0 \quad \text{de donde} \quad \boxed{x'' = \frac{-b}{a}}$$

Ejemplo. — La ecuación $3x^2 - 5x = 0$, que puede escribirse $x(3x-5) = 0$, tiene por raíces

$$x' = 0 \qquad \text{y} \qquad x'' = \frac{5}{3}$$

III. Forma $ax^2 = 0$. — No siendo nulo el factor a, habrá de serlo x. Luego, la única solución es $x' = x'' = 0$.

45. Resolución de la ecuación general. — Según hemos dicho, la forma general de la ecuación completa de segundo grado es

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la que supondremos siempre que el coeficiente a es positivo.

Con el fin de obtener la fórmula general que nos permita hallar directamente las raíces, practicaremos una serie de transformaciones en esta ecuación.

Comencemos por pasar c al segundo miembro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multipliquemos por $4a$ a los dos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumemos b^2 a los dos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es ahora el cuadrado del binomio $2ax + b$. Luego, la ecuación propuesta es equivalente a

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

transponiendo b,

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

y dividiendo por $2a$, resulta finalmente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hay, por tanto, dos raíces o soluciones, que suelen designarse por las letras x' y x''; es decir:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1.º — Resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Aplicando las fórmulas anteriores, se tiene

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

es decir,

$$x' = \frac{7 + \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 + \sqrt{25}}{4} = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

$$x'' = \frac{7 - \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 - \sqrt{25}}{4} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Comprobación:

$$2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 = 18 - 21 + 3 = 0$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 3 = 0$$

EJEMPLO 2.° — Resolver $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{12}$

Transformando la ecuación hasta conseguir que adopte la forma general, se obtiene sucesivamente:

$$12\,(x+1) + 12\,(x-1) = 5\,(x^2-1)$$
$$12\,x + 12 + 12\,x - 12 = 5\,x^2 - 5$$
$$5\,x^2 - 24\,x - 5 = 0$$

Aplicando ahora la fórmula general de resolución, se tiene

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-5)}}{2 \cdot 5} = \frac{24 \pm 26}{10}$$

Luego, las raíces son

$$x' = \frac{24 + 26}{10} = 5 \qquad x'' = \frac{24 - 26}{10} = -\frac{1}{5}$$

como es fácil comprobar.

46. Discusión. — Recordemos que *discutir* una ecuación es analizar los valores que puede tomar la incógnita, según los que se atribuyan a los datos.

Sea, de nuevo, la forma general de la ecuación completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas raíces son

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La naturaleza y valor de estas raíces dependen esencialmente del radicando $b^2 - 4ac$, llamado también *discriminante* de la ecuación. Podemos, en efecto, enunciar la siguiente regla:

1.° *Si el discriminante* $D = b^2 - 4ac$ *es positivo, la ecuación tiene dos raíces reales y desiguales. Dichas raíces serán racionales, si* $D = b^2 - 4ac$ *es cuadrado perfecto, e irracionales en el caso contrario.*

2.° *Si el discriminante* $D = b^2 - 4ac$ *es nulo, las raíces serán reales, racionales, e iguales a* $\frac{-b}{2a}$.

3.° *Si el discriminante* $D = b^2 - 4ac$ *es negativo, la ecuación carece de raíces reales, o de otro modo: las raíces son imaginarias.*

EJEMPLO 1.º: $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$; $x' = 2$, $x'' = -4$.

EJEMPLO 2.º: $x^2 + 2x - 2 = 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$;

$x' = -1 + \sqrt{3} = 0'732...$ $\qquad$ $x'' = -1 - \sqrt{3} = -2'732...$

EJEMPLO 3.º: $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$; $x' = x'' = -1$.

EJEMPLO 4.º: $x^2 + 2x + 5 = 0$; $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$; raíces *imaginarias*.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:

454. $4x^2 - 32x = 0$

455. $3x^2 - 27 = 0$

456. $0'001x^2 = 10$

457. $9 = 3(x^2 - 1)$

458. $3(x+1) - x(x-1) = 4x$

459. $\dfrac{7}{3x^2} - \dfrac{11}{9x^2} = \dfrac{5}{8}$

460. $\dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{12}{x}$

461. $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{a^4}{3}$

462. $(a+b)x^2 = (a^2 - b^2)x$

463. $4ax^2 - bx = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones completas:

464. $2x^2 - 11x - 21 = 0$

465. $21x - 100 = x^2 + 21 - x$

466. $7x^2 + 10 = 101x - 3x^2$

467. $2x^2 - 1 = 1 - x - x^2$

468. $x^2 - 8x - (8x + 17) = 0$

469. $5x - 12 = x^2 - 4x + 8$

470. $(x-1)^2 = 16$

471. $3(x-1)(x+1) = 8x$

472. $x^2 - 9ax - 10a^2 = 0$

473. $k^2x^2 - k(m-n)x - mn = 0$

474. $2 + \frac{12}{x-3} = x + 3$

475. $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$

476. $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$

477. $\frac{3(2x-1)}{2x+1} - \frac{2(2x+1)}{2x-1} - 5 = 0$

478. $\frac{x+6}{x-6} + \frac{x-6}{x+6} = \frac{17}{4}$

479. $\frac{3-x}{5} = \frac{2}{x} - \frac{4}{5}$

480. $\frac{x-1}{8} + \frac{1}{x+1} = x - \frac{13}{3}$

481. $\frac{4x}{9} = \frac{4x+7}{19} - \frac{x-5}{x+3}$

482. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{4}$

483. $\frac{x}{5} + 30x^{-1} = 5$

484. $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-7}{x-1} = 4 - \frac{3x-1}{x+2}$

485. $\frac{3x-4}{5x-16} = \frac{4x+1}{6x-11}$

486. $\left(6x - \frac{2}{3}\right)x - 2\left(x - \frac{1}{9}\right) = 0$

487. $2x^2 - \frac{6x}{11} - \frac{3x}{4} = \frac{22x^2}{3} - \frac{9}{44} - \frac{11x}{4}$

488. $\frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$

489. $\frac{1}{2x-5a} + \frac{5}{2x-a} = \frac{2}{a}$

490. $\frac{x}{b(a+b)} + \frac{a}{(a+b)x} = \frac{1}{b}$

491. $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x}$

492. $\frac{(x-a-b)4x}{a+b+c} + a + b = c$

493. $\frac{(a-x)^2 - (x-b)^2}{(a-x)(x-b)} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}$

Determinar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes, por el solo examen del discriminante:

494.
$x^2 + 2x - 3 = 0$
$x^2 - 6x + 4 = 0$
$x^2 - 5x + 8 = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$9x^2 - 24x + 16 = 0$

495.
$3x - 9x^2 + 1 = 0$
$x^2 = 2x - 7$
$10 = 4x + 5x^2$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$x^2 - 4x + 8 = 0$

9. Propiedades de las raíces

47. Suma de las raíces de una ecuación de segundo grado. — Las raíces de la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

pueden expresarse así:

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al sumar miembro a miembro estas igualdades, se destruyen los términos opuestos y resulta:

$$\boxed{x' + x'' = -\frac{b}{a}}$$

Podemos, por tanto, enunciar la siguiente propiedad:

La suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x, *cambiado de signo, dividido por el coeficiente de* x^2.

EJEMPLO. — La suma de las raíces de cada una de las ecuaciones siguientes será:

$$x^2 - 7x + 12 = 0; \qquad \text{suma} = \frac{7}{1} = 7$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0; \qquad \text{suma} = \frac{5}{2} = 2\,\tfrac{1}{2}$$

$$4x^2 + 20x + 21 = 0; \qquad \text{suma} = \frac{-20}{4} = -5$$

48. Producto de las raíces. — Observando que las expresiones que nos dan el valor de las raíces,

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son suma y diferencia, su producto será una diferencia de cuadrados. En efecto: multiplicando las igualdades anteriores, resulta:

$$x'x'' = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

es decir, que

$$x'x'' = \frac{c}{a}$$

de donde se deduce la siguiente propiedad:

El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente, dividido por el coeficiente de x^2.

EJEMPLO. — El producto de las raíces de cada una de las ecuaciones dadas en el ejemplo del párrafo anterior será, respectivamente:

$$\frac{12}{1} = 12; \qquad \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} = -1\,\tfrac{1}{2}; \qquad \frac{21}{4} = 5\,\tfrac{1}{4}$$

49. Determinación de una ecuación de segundo grado, conocidos el producto y la suma o diferencia de sus raíces. — Si dividimos por a a los dos miembros de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

resulta esta otra equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad [1]$$

Ahora bien: recordando que

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \text{ será } \frac{b}{a} = -(x'+x'')$$

Por consiguiente, sustituyendo en [1]

$$\frac{b}{a} \text{ por } -(x'+x'') \text{ y } \frac{c}{a} \text{ por } x'x''$$

se obtiene

$$x^2 - (x'+x'')\,x + x'x'' = 0$$

o bien, designando por s a la suma de las raíces y por p al producto,

$$\boxed{x^2 - sx + p = 0} \qquad [2]$$

que es la *forma general de la ecuación de segundo grado en función de la suma y el producto de sus raíces.*

EJEMPLO. — Determinar una ecuación de segundo grado, sabiendo que la suma de sus raíces es $\frac{1}{4}$ y el producto $-\frac{3}{8}$.

Sustituyendo en la forma general $x^2 - sx + p = 0$, resulta la ecuación

$$x^2 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{8} = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

Si en lugar de la suma de las raíces conocemos la diferencia, también es fácil determinar la ecuación. En efecto: a partir de la identidad

$$(x'+x'')^2 = (x'-x'')^2 + 4x'x''$$

que puede escribirse abreviadamente del modo siguiente (si designamos por d a la diferencia $x' - x''$):

$$s^2 = d^2 + 4p$$

podremos hallar s y aplicar el caso anterior.

EJEMPLO. — Determinar la ecuación de segundo grado en la que la diferencia de las raíces es 5 y el producto -6.

Tendremos:

$$s^2 = d^2 + 4p = 25 - 24 = 1; \qquad s = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

y según la forma general $x^2 - sx + p = 0$, resultan las ecuaciones

$$x^2 - x - 6 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + x - 6 = 0$$

ambas solución del problema, como es fácil comprobar.

50. Formación de una ecuación de segundo grado, conocidas sus raíces. — Si descomponemos en factores el trinomio que aparece en el primer miembro de la ecuación

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$$

tendremos, de acuerdo con lo estudiado en el párrafo 13,

$$\boxed{(x - x'')(x - x') = 0} \qquad [3]$$

que es la *forma general de la ecuación de segundo grado en función de sus raíces.*

Las dos formas [2] y [3], indistintamente, pueden servir para *formar una ecuación cuyas raíces se conocen.*

EJEMPLO 1.º — Formar la ecuación cuyas raíces son $\frac{3}{4}$ y $-\frac{1}{2}$.

Como

$$s = \tfrac{3}{4} + (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad p = \tfrac{3}{4} \times (-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{8}$$

hallaremos, según la forma $x^2 - sx + p = 0$,

$$x^2 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{8} = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

Asimismo, si empleamos la forma $(x - x')(x - x'') = 0$, obtendremos

$$(x - \tfrac{3}{4})(x + \tfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad 8x^2 - 2x - 3 = 0$$

resultado que, como se ve, coincide con el hallado en primer lugar.

EJEMPLO 2.º — Formar la ecuación cuyas raíces son $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$.

Como

$$s = 2 \qquad \text{y} \qquad p = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = -2$$

la ecuación será:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

51. Aplicación al estudio de las raíces reales en relación con los coeficientes. — **Las propiedades de las raíces, enunciadas en los párrafos 47 y 48, nos permiten:**

1.° ***Comprobar las soluciones halladas en la resolución de una ecuación, sin necesidad de sustituir en ella la incógnita por el valor de cada raíz.***

EJEMPLO. — Sea la ecuación $7x^2 - 17x - 12 = 0$, que, resuelta, produce $x' = 3$ y $x'' = -\frac{4}{7}$.

Como

$$x' + x'' = 3 + \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{21 - 4}{7} = \frac{17}{7} = -\frac{b}{a}$$

y

$$x'x'' = 3 \times \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{12}{7} = \frac{c}{a}$$

diremos que las raíces halladas son las verdaderas.

2.° ***Conocer, sin resolver la ecuación, el signo que han de tener las raíces, una vez que se ha probado que existen.***

EJEMPLO 1.° — Sea la ecuación $3x^2 - 14x + 8 = 0$.

Por ser el discriminante, $D = b^2 - 4ac = 196 - 96 = 100$, positivo, la ecuación propuesta tendrá las raíces reales y desiguales (núm. 46). Ahora bien: por ser

$$x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{8}{3} \text{ (positivo)},$$

corresponderá a las dos raíces el mismo signo; y como, por otra parte, se verifica que la suma

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{14}{3} \text{ es positiva,}$$

dichas dos raíces llevarán el signo +.

EJEMPLO 2.° — Consideremos la ecuación $3x^2 - 14x - 8 = 0$.

Como el discriminante, $D = b^2 - 4ac = 196 + 96 = 292$, es positivo, la ecuación dada tendrá dos raíces reales y desiguales (46). Además, por ser

$$x'x'' = \frac{c}{a} = -\frac{8}{3} \text{ (negativo)},$$

las raíces serán de signos contrarios; y como, por otra parte, resulta que la suma

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{14}{3} \text{ es positiva,}$$

corresponderá signo + a la raíz de mayor valor absoluto.

EJEMPLO 3.º — Sea la ecuación $x^2 + 12x + 36 = 0$.

El discriminante, $D = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$, es nulo; luego, las raíces serán reales e iguales (46). Como se cumple que

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

las raíces serán negativas y ambas iguales a $(-12) : 2 = -6$.

EJERCICIOS

Determinar las ecuaciones de segundo grado que tienen por suma (o diferencia) y producto de raíces los que a continuación se indican:

496. $s = 7, \quad p = 12$

497. $s = -2, \quad p = -3$

498. $s = 5, \quad p = -14$

499. $d = 7, \quad p = -6$

500. $s = -5, \quad p = 6$

501. $s = \frac{1}{2}, \quad p = -\frac{1}{9}$

502. $s = -3a, \quad p = 2a^2$

503. $d = 2b, \quad p = -b^2$

Formar las ecuaciones cuyas raíces son:

504. $-2, \quad -3$

505. $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}$

506. $\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{6}$

507. $0'2, \quad 0'5$

508. $1'5, \quad -2'4$

509. $3m, \quad 2m$

510. $2\frac{1}{2}, \quad 2$

511. $-1\frac{1}{2}, \quad -3\frac{1}{2}$

512. $a - b, \quad b - a$

513. $a + b, \quad a - b$

514. $\frac{a}{b}, \quad -\frac{a}{b}$

515. $\sqrt{a}, \quad -\sqrt{a}$

516. $1'\overset{\cap}{2}..., \quad 0'5\overset{\cap}{4}...$

517. $3 + \sqrt{2}, \quad 3 - \sqrt{2}$

518. $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}, \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$

519. $2 + a + \sqrt{a}, \quad 2 - a - \sqrt{a}$

520. $(a+b)^2, \quad (a-b)^2$

521. $\frac{a + \sqrt{b}}{2}, \quad \frac{a - \sqrt{b}}{2}$

Determinar el signo que corresponde a las raíces de las ecuaciones siguientes, sin resolver de antemano la ecuación:

522. $x^2 + 3x - 21 = 0$

523. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

524. $x^2 + 6x + 9 = 0$

525. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

526. $10x + 5 = -3x^2$

527. $18x^2 - 9x - 2 = 0$

528. $7x^2 - 9x - 4 = 0$

529. $8x^2 - 10x + 3 = 0$

530. $2x^2 + 3x - 10 = 0$

531. $3x^2 + 8x + 5 = 0$

532. Escribir una ecuación de segundo grado, sabiendo que la diferencia y el producto de sus raíces es igual a $\frac{1}{6}$. Resolver luego la ecuación obtenida y comprobar el problema.

533. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1; \qquad \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

y escribir una ecuación de segundo grado que tenga por raíces los valores obtenidos para x e y.

534. Escribir una ecuación de segundo grado, sabiendo que la media aritmética de sus raíces vale -3 y la media geométrica 3. Resolver la ecuación.

535. Resolver la ecuación $x = \frac{2}{x-1}$ y escribir otra que tenga por raíces los cuadrados de las raíces de la ecuación dada.

536. Hallar el valor que ha de tener m en la ecuacción $x^2 - 6x + m = 0$ para que las raíces sean iguales.

537. Hallar el valor de c en la ecuación $x^2 - 30x + c = 0$, sabiendo que una de las raíces es la cuarta parte de la otra.

538. Determinar b en la ecuación $x^2 + bx + 21 = 0$, sabiendo que las raíces tienen por diferencia 4.

539. Formar una ecuación de segundo grado que tenga por raíces los valores deducidos para las incógnitas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{3} - \frac{y-5}{6} = 0; \qquad \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{4} = 0'45$$

540. En la ecuación $2x^2 - (5+a)x + 2 = 0$, hallar el valor que ha de tener a para que las raíces sean iguales.

541. En la ecuación $2x^2 - mx + 72 = 0$, calcular el valor que ha de tener m para que: 1.º, las raíces sean iguales; 2.º, una sea cuádruple de la otra; 3.º, sean opuestas.

542. La suma de las raíces de la ecuación $x^2 - (a+2)x + b = 0$, vale -5 y su diferencia 7. Calcular el valor de a y el de b.

543. Dada la ecuación $ax^2 + bx - 5 = 0$, determinar los valores que deben tener a y b para que las raíces sean 1 y 2.

10. Trinomio de segundo grado

52. Trinomio de segundo grado. — Llamamos *trinomio de segundo grado* a la expresión

$$ax^2 + bx + c$$

en la que a es distinto de cero.

Por ejemplo

$$2x^2 - 7x + 5$$

A cada valor dado a x corresponde uno para el trinomio, que será el valor numérico de la expresión para el de x considerado. Así, para $x = 3$ el trinomio anterior vale

$$2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 5 = 2$$

Se representa el trinomio por la letra y, o por $f(x)$, ya que se trata de una función entera de x, de segundo grado. Tendremos, por tanto:

$$y = 2x^2 - 7x + 5 \quad \text{o bien} \quad f(x) = 2x^2 - 7x + 5; \quad f(3) = 2$$

Se denominan *raíces* o *ceros* del trinomio los valores de x para los cuales se anula el trinomio. Son fáciles de calcular, pues basta hacer

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y resolver la ecuación de segundo grado que resulta.

53. Representación gráfica del trinomio de segundo grado. — Sea, por ejemplo, el trinomio

$$y = x^2 + 5x - 6$$

Obtengamos primeramente la *tabla de valores*, es decir, demos valores a x y hallemos los correspondientes de y. Se tiene:

Cuando $x =$	$-\infty$ ...	-9	-7	-6	crece	-5	-4	-3	$-2\frac{1}{2}$
$y=x^2+5x-6 =$	$+\infty$ ...	30	8	0	decrece	-6	-10	-12	$-12\frac{1}{4}$ (mín.)

-2	-1	0	1	crece	2	3	4	... $+\infty$
-12	-10	-6	0	crece	8	18	30	... $+\infty$

Si elegimos ahora un sistema de ejes coordenados $X'X$ e $Y'Y$ (fig. 1), y vamos señalando los puntos que determinan los distintos pares de valores contenidos en la tabla, obtendremos, al unirlos, una curva llamada *parábola*, que será la gráfica correspondiente al trinomio. En general, diremos que la gráfica de un trinomio cualquiera de segundo grado es una curva semejante a la de la figura 1, denominada parábola.

Observando la anterior tabla de valores y la figura 1, deducimos:

1.° Cuando x crece de $-\infty$ a -6, el trinomio decrece de $+\infty$ a 0.

2.° El trinomio se anula para un primer valor de x igual a -6, que es una raíz del trinomio propuesto, igualado a cero; -6 es el primer cero del trinomio.

3.° El trinomio alcanza su *valor mínimo* cuando a x se le atribuye el valor $-2\frac{1}{2}$, y este valor mínimo es $-12\frac{1}{4}$.

4.° El trinomio se vuelve a anular para un valor de x igual a 1, que es la otra raíz o segundo cero del trinomio.

5.° Cuando x crece de 1 a ∞, el trinomio crece de 0 a ∞.

6.° El trinomio es positivo, es decir, del mismo signo que el coeficiente a de x^2, para todo valor de x no comprendido entre las raíces (en este caso, si $x < -6$ y $x > 1$).

7.° El trinomio es negativo, es decir, de signo contrario al del coeficiente de su primer término, para todo valor de x comprendido entre las raíces (en este caso, si $-6 < x < 1$).

8.° Cuando los valores de x se apartan igualmente del valor $-2\frac{1}{2}$, se obtienen valores iguales para el trinomio, lo cual significa que la curva es simétrica respecto de la perpendicular al eje $X'X$, trazada por el punto de abscisa $-2\frac{1}{2}$.

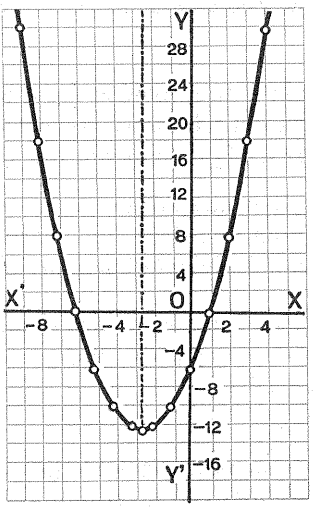


FIGURA 1

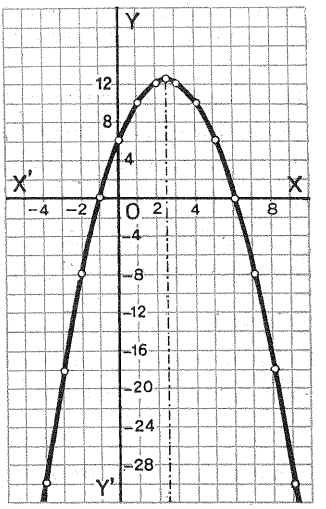


FIG. 2

Supongamos ahora un trinomio con el coeficiente a negativo. Sea, por ejemplo:

$$y = -x^2 + 5x + 6$$

Formando la tabla de valores, tendremos:

Cuando $x =$	$-\infty$ ...	-4	-3	-2	crece	-1	0	1	2	$2\frac{1}{2}$
$= -x^2 + 5x + 6 =$	$-\infty$ ...	-30	-18	-8	crece	0	6	10	12	$12\frac{1}{4}$ (máx.

3	4	5	crece	6	7	8	9	... $+\infty$
12	10	6	decrece	0	-8	-18	-30	... $-\infty$

Determinados los puntos correspondientes a los distintos pares de números que figuran en la tabla, y unidos luego por una línea curva, se obtiene la gráfica de la figura 2. La curva obtenida es también una parábola, pero se diferencia de la anterior en que su concavidad está dirigida hacia el eje OY', mientras que la primera lo hace hacia el eje OY.

EJERCICIOS. — Dejamos a la iniciativa del alumno el deducir las conclusiones que se desprenden de la observación de la tabla de valores y la gráfica correspondiente, para este caso en que a es negativo.

Tanto en el caso de ser $a > 0$ como cuando $a < 0$, pueden darse otras dos posiciones de la parábola representativa del trinomio, respecto del eje de abscisas, según que el discriminante D sea igual o menor que cero.

CASO $a > 0$. — 1.° Si $D = 0$, el trinomio tiene una raíz doble ($x' = x''$), es positivo siempre, y da lugar a una parábola que tiene un solo punto de contacto con el eje $X'X$ y con la concavidad dirigida hacia arriba.

2.° Si $D < 0$, el trinomio carece de raíces reales, es positivo siempre, y da lugar a una parábola que no tiene ningún punto común con el eje $X'X$ y con la concavidad dirigida hacia arriba.

CASO $a < 0$. — 1.° Si $D = 0$, el trinomio tiene una raíz doble ($x' = x''$), es negativo siempre, y su gráfica es una parábola con un solo punto de contacto con el eje $X'X$ y con la concavidad dirigida hacia abajo.

2.° Si $D < 0$, el trinomio carece de raíces reales, es negativo siempre, y su gráfica es una parábola que no tiene ningún punto de contacto con el eje $X'X$ y con la concavidad dirigida hacia abajo.

Estas cuatro posiciones y las dos antes estudiadas se resumen en la figura 3.

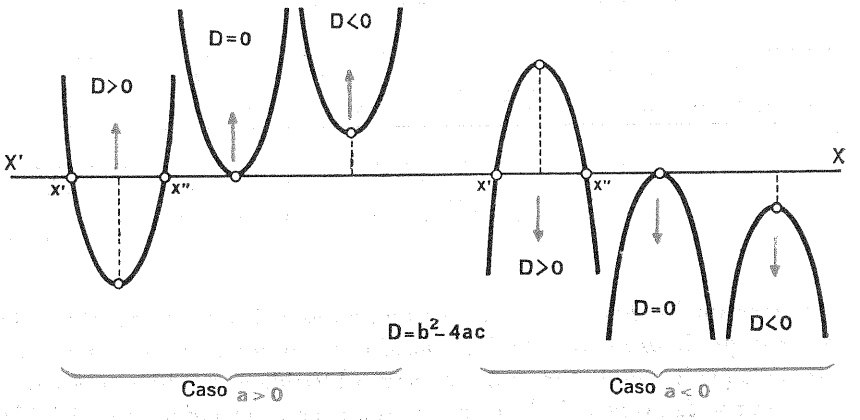


FIG. 3

54. Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado. — Sea la ecuación de segundo grado

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Resolver esta ecuación es hallar los valores de x para los cuales se anula el trinomio

$$y = x^2 + 5x - 6$$

Por consiguiente, si representamos gráficamente este trinomio, y determinamos luego las abscisas de los puntos de intersección de la parábola que resulte con el eje $X'X$ (cuyos puntos tienen todos de ordenada cero), habremos obtenido de un modo gráfico las raíces o soluciones de la ecuación dada. En la figura 1 vemos que esas soluciones son $x' = 1$ y $x'' = -6$.

En general, resolver gráficamente la ecuación $ax^2 + bx + c$ es determinar las abscisas de los puntos de intersección de la parábola correspondiente al trinomio $y = ax^2 + bx + c$ con el eje $X'X$.

La resolución gráfica de la ecuación de segundo grado confirma lo dicho en el párrafo 46 sobre las raíces. Así, puede ocurrir que la parábola representativa del trinomio tenga con el eje $X'X$ *dos* puntos de intersección, *uno* o *ninguno*. En el primer caso, la ecuación tendrá dos raíces reales y desiguales; en el segundo, la ecuación tiene una raíz doble o dos raíces iguales, $x' = x''$; y en el tercero, la ecuación carece de soluciones reales.

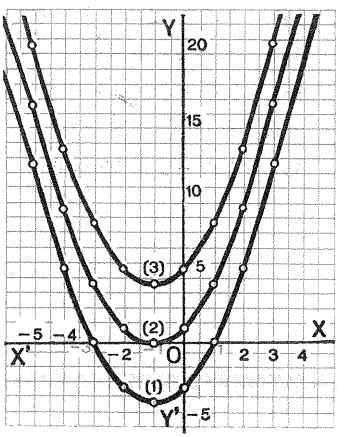


FIG. 4

EJEMPLO. — En la figura 4 se han resuelto gráficamente las ecuaciones

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad [1]$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad [2]$$
$$x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad [3]$$

comprendidas, respectivamente, en los tres casos dichos.

En efecto: La parábola [1], correspondiente al trinomio $y = x^2 + 2x - 3$, corta al eje $X'X$ en los puntos de abscisas $x' = 1$ y $x'' = -3$, las cuales son las raíces de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, como es fácil comprobar.

La parábola [2], correspondiente al trinomio $y = x^2 + 2x + 1$, tiene un solo punto de contacto con el eje $X'X$, cuya abscisa es -1. Diremos, pues, que la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene por solución la raíz doble $x' = x'' = -1$.

Finalmente, la parábola [3], representativa del trinomio $y = x^2 + 2x + 5$, no tiene ningún punto de intersección con el eje $X'X$. Diremos, por consiguiente, que la ecuación $x^2 + 2x + 5$ no tiene raíces reales.

EJERCICIOS

Representar gráficamente los siguientes trinomios:

544. $y = x^2 - 7x + 8$

545. $y = x^2 - 6x + 1$

546. $y = 4x^2 - 3x + 1$

547. $y = 2x^2 - 2x - 3$

548. $y = x^2 - 6x + 9$

549. $y = x^2 - 2x + 3$

550. $y = -4x^2 - 4x + 3$

551. $y = -x^2 - 2x - 1$

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

552. $x^2 + x - 2 = 0$

553. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

554. $x^2 - 4x + 5 = 0$

555. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

556. $x^2 - 7x + 6 = 0$

557. $2x^2 - x - 10 = 0$

558. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

559. $x^2 - 5x + 4 = 0$

560. $4x^2 + 20x + 21 = 0$

561. $x^2 - 6x + 9 = 0$

562. $x^2 - 2x + 3 = 0$

563. $x^2 - 4x = 0$

11. Ecuaciones y sistemas reducibles a ecuaciones cuadráticas

55. Estudiamos a continuación algunos casos sencillos de ecuaciones cuya resolución puede hacerse depender de la resolución de una ecuación de segundo grado.

I. **Ecuaciones bicuadradas.** — Las ecuaciones de cuarto grado que sólo tienen los términos de grado par se llaman *bicuadradas*.

Su forma general es

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Tomando una incógnita auxiliar y, de modo que sea $y = x^2$, y en consecuencia $y^2 = x^4$, la ecuación bicuadrada adopta la forma

$$ay^2 + by + c = 0$$

de la ecuación de segundo grado, cuya resolución nos dará

$$y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Y teniendo ahora en cuenta, según el convenio anterior, que es

$$y' = x^2 \qquad y'' = x^2$$

la ecuación propuesta dará lugar a las cuatro raíces siguientes:

$$x = \pm\sqrt{y'} = \begin{cases} x_1 = +\sqrt{y'} \\ x_2 = -\sqrt{y'} \end{cases} \qquad x = \pm\sqrt{y''} = \begin{cases} x_3 = +\sqrt{y''} \\ x_4 = -\sqrt{y''} \end{cases}$$

EJEMPLO 1.º — Resolver la ecuación bicuadrada $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

Si suponemos que $y = x^2$, la ecuación dada se convierte en $y^2 - 29y + 100 = 0$, de la cual se obtiene

$$y = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2} \quad \text{es decir} \quad y' = 25 \quad \text{e} \quad y'' = 4$$

Por consiguiente,

$$x = \pm\sqrt{25} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases} \qquad x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Como vemos, los cuatro valores obtenidos para x son *reales*.

EJEMPLO 2.º — Resolver la ecuación $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.

Haciendo $y = x^2$, resulta $y^2 + 3y - 28 = 0$, ecuación que nos da

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} \quad \text{es decir} \quad y' = 4 \quad \text{e} \quad y'' = -7$$

y, por consiguiente,

$$x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \qquad x = \pm\sqrt{-7} = \begin{cases} x_3 = +\sqrt{-7} \\ x_4 = -\sqrt{-7} \end{cases}$$

Es decir: dos valores de x son *reales* y los otros dos *imaginarios*.

II. Ecuaciones binomias y ecuaciones trinomias. ECUACIONES BINOMIAS **son aquellas que pueden reducirse a la forma**

$$x^m = a$$

Resolución. **La ecuación precedente expresa que x es una raíz m-ésima de a. Por consiguiente:**

1.º **Si m es par y a es positivo, la ecuación tiene dos soluciones, que son las dos raíces m-ésimas de a.**

2.º **Si m es par y a es negativo, la ecuación carece de solución real.**

3.º **Si m es impar, la ecuación tiene siempre una solución.**

EJEMPLO 1.º — Resolver la ecuación $x^4 = 3$.

Las soluciones pedidas serán las dos raíces cuartas de 3, es decir,

$$x_1 = +\sqrt[4]{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\sqrt[4]{3}$$

EJEMPLO 2.º — Resolver la ecuación $x^3 + 1.000 = 0$.

Podemos escribir

$$x^3 = -1.000 \quad \text{de donde} \quad x = \sqrt[3]{-1.000} = -10$$

ECUACIONES TRINOMIAS **son aquellas que pueden reducirse a la forma**

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

Las *ecuaciones bicuadradas* son ecuaciones trinomias en las que $m = 2$.

Resolución. Si hacemos $x^m = y$, la ecuación resultante de una ecuación trinomia será

$$ay^2 + by + c = 0$$

y resolviendo esta ecuación, cada una de las dos raíces halladas permite formar una ecuación binomia.

EJEMPLO. — Resolver la ecuación $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$.

La ecuación resultante al hacer $x^3 = y$ es

$$8y^2 - 63y - 8 = 0$$

cuyas raíces son $y' = 8$ e $y'' = -\frac{1}{8}$

Ahora bien: la ecuación

$$x^3 = 8 \quad \text{da} \quad x_1 = 2$$

y la

$$x^3 = -\frac{1}{8} \quad \text{da} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Luego, las raíces pedidas son **2** y $-\dfrac{1}{2}$.

III. Resolución de ecuaciones irracionales. — *Ecuación irracional* es aquélla en la que alguna de las incógnitas figura bajo el signo radical.

Estudiaremos aquí solamente las ecuaciones irracionales con radicales de índice 2.

El principio en que se basa la resolución de ecuaciones irracionales va expresado por el siguiente

TEOREMA. — *Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra que, además de tener las soluciones de la primera, contiene las de una tercera, obtenida al cambiar de signo a uno de los miembros de la ecuación dada.*

En efecto: consideremos la ecuación

$$A(x) = B(x) \qquad [1]$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, resulta

$$[A(x)]^2 = [B(x)]^2 \qquad [2]$$

ecuación que puede tomar la forma

$$[A\,(x)]^2 - [B\,(x)]^2 = 0$$

y ésta, a su vez, por desarrollo de la diferencia de cuadrados, produce

$$[A\,(x) - B\,(x)]\,[A\,(x) + B\,(x)] = 0 \qquad [3]$$

Ahora bien: la última ecuación se convierte en identidad al sustituir x por cada uno de los valores que anulan a los factores $[A\,(x) - B\,(x)]$ y $[A\,(x) + B\,(x)]$, es decir, por la solución de

$$A\,(x) - B\,(x) = 0, \quad \text{o su equivalente} \quad A\,(x) = B\,(x)$$

y de

$$A\,(x) + B\,(x) = 0, \quad \text{o su equivalente} \quad A\,(x) = -B\,(x)$$

Luego, la ecuación [3] y, por tanto, su equivalente la [2], contiene, además de las soluciones de $A\,(x) = B\,(x)$, las de $A\,(x) = -B\,(x)$, como se quería demostrar.

CONSECUENCIA IMPORTANTE. — *Siempre que la resolución de una ecuación exija elevar sus dos miembros al cuadrado, es preciso comprobar si las soluciones halladas convienen o no a la ecuación propuesta, y desechar las raíces extrañas.*

Veamos algunos ejemplos que nos permitan deducir la regla que hemos de aplicar para resolver las ecuaciones irracionales:

EJEMPLO 1.º — Resolver la ecuación irracional $18 - \sqrt{x + 10} = 2$.

Si elevamos al cuadrado los dos miembros, el radical no desaparece; para lograrlo habrá que aislarlo en uno de los miembros. Se tiene:

$$18 - 2 = \sqrt{x + 10}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, resulta

$$256 = x + 10 \quad \text{de donde} \quad x = 246$$

Comprobación:

$$18 - \sqrt{246 + 10} = 18 - 16 = 2; \qquad 2 = 2$$

Luego, la ecuación dada tiene por solución $x = 246$.

EJEMPLO 2.º — Resolver la ecuación $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3} = 6$.

Aislando el primer radical, obtenemos

$$\sqrt{x+9} = 6 - \sqrt{x-3}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, resulta

$$x + 9 = 36 - 12\sqrt{x-3} + x - 3$$

Aislando el radical y reduciendo términos semejantes en el otro miembro, nos da

$$\sqrt{x-3} = 2$$

y elevando nuevamente al cuadrado, se tiene

$$x - 3 = 4 \quad \text{de donde} \quad x = 7$$

Comprobación:

$$\sqrt{7+9} + \sqrt{7-3} = 4 + 2 = 6; \qquad 6 = 6$$

Esta identidad prueba que el valor hallado, $x = 7$, es solución de la ecuación propuesta.

EJEMPLO 3.º — Resolver la ecuación $\sqrt{x+9} - \sqrt{x-3} = 6$.

Procediendo como en el ejercicio anterior, hallaríamos el resultado $x = 7$, que no es solución de la ecuación propuesta.

En efecto: haciendo la *comprobación*, resulta

$$\sqrt{7+9} - \sqrt{7-3} = 4 - 2 = 2; \qquad 2 \neq 6$$

Luego, la ecuación dada es *imposible.*

En general, podemos enunciar la siguiente

REGLA. — ***Para transformar en racional una ecuación cuya incógnita aparece en uno o más radicales de índice 2, se elevan al cuadrado los dos miembros tantas veces como radicales haya. Antes de practicar cada una de estas elevaciones, se deberá aislar un radical en uno de los miembros y efectuar todas las reducciones posibles entre los términos del otro.***

Una solución de la ecuación final lo será de la propuesta, si al sustituir en ella la incógnita por dicha solución, el resultado es una identidad.

56. Empleo de una incógnita auxiliar. — Toda ecuación que pueda ponerse bajo la forma

$$ax^2 + bx + c + p\sqrt{ax^2 + bx + c} = q$$

puede resolverse por el siguiente método.

Haciendo

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

obtenemos

$$y^2 + py - q = 0$$

Si y' e y'' son las raíces de esta ecuación, tendremos:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = y', \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = y''$$

y de estas ecuaciones obtendremos cuatro valores de x.

Si y' e y'' son ambas positivas, los cuatro valores de x satisfacen a la ecuación original. Si y' o y'' es negativa, las raíces halladas de la ecuación cuadrática resultante satisfacen a la ecuación

$$ax^2 + bx + c - p\sqrt{ax^2 + bx + c} = q$$

pero no a la ecuación original.

EJEMPLO. — Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x - 15} = 30$.

Restemos 15 a los dos miembros; entonces

$$x^2 - 2x - 15 + 2\sqrt{x^2 - 2x - 15} = 15$$

Haciendo $\sqrt{x^2-2x-15} = y$, obtenemos $y^2 + 2y - 15 = 0$, cuyas raíces son $y' = 3$ e $y'' = -5$.

Elevando al cuadrado y resolviendo las ecuaciones cuadráticas resultantes,

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 - 2x - 40 = 0,$$

obtenemos de la primera $x_1 = 6$ y $x_2 = -4$, y de la segunda $x_3 = 1 + \sqrt{41}$ y $x_4 = 1 - \sqrt{41}$. El primer par de valores satisface a la ecuación dada, pero el segundo par satisface a la ecuación

$$x^2 - 2x - 2\sqrt{x^2-2x-15} = 30$$

57. Sistemas formados por una ecuación de primer grado y otra de segundo. — Para resolver un sistema de esta clase, podemos aplicar el procedimiento de eliminación por sustitución, estudiado el curso pasado.

En la ecuación de primer grado se despejará una de las incógnitas, y la expresión que resulte se llevará a la ecuación de segundo grado, en vez de la incógnita despejada.

EJEMPLO. — Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación, se obtiene

$$y = 7 - 2x \qquad [1]$$

y sustituyendo en la segunda y por esta expresión, resulta

$$x^2 + x(7-2x) = 12 \quad \text{es decir} \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

ecuación esta última que se verifica para $x_1 = 4$ y $x_2 = 3$.

Sustituyendo en [1] x por cada uno de estos valores, se obtiene $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$. Luego, las soluciones del sistema propuesto son

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

58. Sistemas formados por dos ecuaciones de segundo grado. — La resolución de un sistema de dos ecuaciones de segundo grado da lugar ordinariamente a una ecuación de *cuarto grado*, cuya resolución no conocemos.

En algunos casos, sin embargo, la ecuación que se obtiene es bicuadrada, como ocurre en los sistemas de tipo semejante al que resolvemos a continuación.

EJEMPLO 1.º — Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$$

Despejando y en la segunda ecuación, resulta $y = \dfrac{10}{x}$, valor que llevado a la primera nos da

$$x^2 + \frac{10^2}{x^2} = 29 \quad \text{y quitando denominadores,} \quad x^4 + 100 = 29x^2$$

o, reduciendo el segundo miembro a cero,

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

que, como vemos, es una ecuación bicuadrada, cuyas raíces son

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 5, \qquad x_4 = -5$$

Al sustituir en la expresión de y antes hallada la incógnita x por cada uno de estos valores, obtendremos para y los siguientes:

$$y_1 = 5, \qquad y_2 = -5, \qquad y_3 = 2, \qquad y_4 = -2$$

Por consiguiente, las soluciones del sistema propuesto serán

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 5 \\ y_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -5 \\ y_4 = -2 \end{cases}$$

En otros sistemas resulta sencillo eliminar una de las incógnitas empleando el método de reducción; así sucede con aquellos cuyas ecuaciones son ambas del tipo $ax^2 + by^2 = c$.

EJEMPLO 2.º — Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 23 \\ x^2 + 2y^2 = 34 \end{cases}$$

Si multiplicamos por 2 a los dos miembros de la primera ecuación, y sumamos luego ordenadamente, resulta

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 2y^2 = 46 \\ x^2 + 2y^2 = 34 \\ \hline 5x^2 \qquad = 80 \end{array} \quad \text{de donde} \quad x = \pm 4$$

Si hacemos $x = 4$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema, hallaremos $y = \pm 3$. De igual modo, haciendo $x = -4$, obtendremos $y = \pm 3$.

Luego, las cuatro soluciones que admite el sistema propuesto son

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -4 \\ y_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -3 \end{cases}$$

59. Problemas de segundo grado. — ***Problemas de segundo grado*** **son aquellos cuya resolución da lugar a una o más ecuaciones de segundo grado.**

Veamos algunos ejemplos:

PROBLEMA 1.º — ***Se iban a repartir 1.800 ptas. entre cierto número de personas. Cuatro de ellas renunciaron a su parte, por lo que cada una de las restantes recibió 15 ptas. más de lo que estaba previsto. Averiguar el número de personas que había.***

Llamemos x al número que buscamos. De no haber renunciado a su parte las cuatro personas de que se nos habla, cada persona habría recibido $\frac{1.800}{x}$ ptas.; pero al quedar reducido el número de aquéllas a $x - 4$, lo que correspondió a cada una fueron $\frac{1.800}{x-4}$ ptas. Además, según el enunciado, se ha de verificar que

$\frac{1.800}{x-4} - \frac{1.800}{x} = 15$ ecuación equivalente a ésta $15x^2 - 60x - 7.200 = 0$

o bien, simplificando,

$$x^2 - 4x - 480 = 0 \quad \text{de donde} \quad x' = 24, \quad x'' = -20.$$

Aunque los dos valores hallados son raíces de la ecuación deducida del problema, sólo aceptaremos para solución de éste el valor positivo, puesto que, debiendo expresar personas, no tiene sentido hablar de un número negativo. Diremos, pues, que el número de personas de que se trata es de **24.**

PROBLEMA 2.° — *Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide* 15 *dm., y la hipotenusa es dos veces el segundo cateto, más* 1 *dm. Hallar la longitud de los lados desconocidos.*

Si representamos por x la medida del segundo cateto, la de la hipotenusa irá expresada por $2x + 1$, y según el teorema de Pitágoras, podremos escribir

$$(2x+1)^2 = x^2 + 15^2 \quad \text{ecuación equivalente a} \quad 3x^2 + 4x - 224 = 0$$

la cual tiene por raíces $x' = 8$, $x'' = -9\frac{2}{3}$.

Si tomamos $x = 8$, la medida del segundo cateto será **8 dm.**, y la que corresponde a la hipotenusa, **17 dm.** Esta es la única solución del problema, puesto que $-9\frac{2}{3}$ no puede tomarse como lado.

PROBLEMA 3.° — *Dos fuentes, manando a la vez, llenan un depósito en* 12 *horas; haciéndolo por separado, la primera necesita* 18 *horas más que la segunda. ¿Cuánto tiempo emplea cada fuente en llenar el depósito?*

Designando por x el tiempo que emplea la segunda fuente, el empleado por la primera será $x + 18$; y representando por 1 la capacidad del depósito, tendremos:

$$\left(\frac{1}{x+18} + \frac{1}{x}\right) 12 = 1 \quad \text{o su equivalente} \quad x^2 - 6x - 216 = 0$$

cuyas raíces son $x' = 18$, $x'' = -12$, de las cuales sólo la primera es admisible. Es decir, que la primera fuente emplea $18 + 18 = $ **36 horas,** y la segunda **18.**

60. Problemas imposibles e indeterminados. — **Cuando en la ecuación de segundo grado a que da lugar un problema se anulan los coeficientes *a* y *b*, no haciéndolo *c*, tendremos un caso de *imposibilidad.***

Si a la vez se anulan *a*, *b* y *c*, diremos que el problema es *indeterminado*, ya que entonces se verificará la ecuación para cualquier valor de *x*.

Finalmente, un problema *carecerá de solución real*, cuando la ecuación a que da lugar conduce a raíces imaginarias.

61. Problemas que dan lugar a un sistema sencillo de ecuaciones de segundo grado. — Veamos dos ejemplos.

PROBLEMA 1.° — *Los lados de un triángulo miden* 9 *cm.*, 10 *cm.* y 17 *cm. Calcular la altura correspondiente al lado de longitud igual a* 9 *cm.*

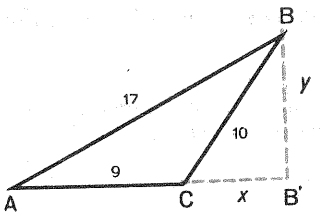


FIG. 5

Según la figura 5, se ha de verificar:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2 \\ (x+9)^2 + y^2 = 17^2 \end{cases}$$

sistema que tiene por soluciones

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 6$$
$$y_1 = 8 \qquad y_2 = -8$$

El valor positivo de y, es decir $y = \mathbf{8\ cm.}$, será la altura pedida.

PROBLEMA 2.° — *Un capital colocado a interés simple, a un cierto tanto por ciento, se convierte al cabo de* 3 *años en* 4.600 *ptas. Incrementado el capital en un cuarto de su valor y el tanto por ciento en* 1, *al cabo del mismo tiempo el nuevo capital se habría convertido en* 5.900 *(pesetas). Calcular el capital primero y el tanto por ciento a que se prestó.*

Designando por x e y, respectivamente, el capital y el %, se tiene:

$$\begin{cases} x + \dfrac{3\,xy}{100} = 4.600 \\ x + \dfrac{x}{4} + \dfrac{3\left(x + \dfrac{x}{4}\right)(y+1)}{100} = 5.900 \end{cases}$$

o su equivalente

$$\begin{cases} 100\,x + 3\,xy = 460.000 \\ 515\,x + 15\,xy = 2.360.000 \end{cases}$$

Multiplicando por -5 a la primera ecuación de este sistema y sumando ordenadamente, se obtiene

$$15\,x = 60.000 \quad \text{de donde} \quad x = 4.000$$

Llevando este valor de x a cualquiera de las ecuaciones anteriores, resulta $y = 5$. Luego, el capital pedido es de **4.000 ptas.**, y se colocó al **5 %.**

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones bicuadradas:

564. $x^4 + 100 = 29\,x^2$

565. $x^2 + \dfrac{324}{x^2} = 45$

566. $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

567. $4 = 5\,x^2 - x^4$

568. $x^4 - 3\,x^2 + 2 = 0$

569. $2\,x^4 - 5\,x^2 + 2 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones binomias o trinomias:

570.
1) $x^3 = -1$
2) $x^3 = 27$
3) $x^3 = -8$
4) $x^4 = 1$
5) $x^4 - 25 = 0$
6) $x^6 - 1 = 0$
7) $x^6 = 64$
8) $x^5 = 100.000$
9) $x^4 = 5$

571.
1) $x^6 + 7\,x^3 - 8 = 0$
2) $x^6 - 19\,x^3 - 216 = 0$
3) $x^8 - 97\,x^4 + 1.296 = 0$
4) $x^{10} + 31\,x^5 - 32 = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

572. $\sqrt{7\,x + 2} - 4 = 0$

573. $\sqrt{7\,x - 3} + 3 = 2\,x$

574. $5\sqrt{x - 3} - 4 = 6$

575. $\sqrt{2\,x + 4} = \sqrt{2\,x} + 1$

576. $\sqrt{5 + 2\,x} = 1 + \sqrt{2\,x}$

577. $\sqrt{2\,x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$

578. $\sqrt{x - 7} + \sqrt{3\,x + 1} = 10$

579. $2\sqrt{x + 4} = \sqrt{5\,x + 4}$

580. $\sqrt{x^2 + 3\,x + 7} = 5$

581. $\sqrt{3\,x^2 + 5\,x + 1} - 3 = 0$

582. $\sqrt{7 + 2\,x} - \sqrt{3 + x} = 1$

583. $\sqrt{2\,x - 4} - \sqrt{3\,x - 12} = \sqrt{5\,x - 16}$

584. $\sqrt{5\,x - 10} + \sqrt{3\,x + 12} = \sqrt{8\,x + 2}$

585. $2\sqrt{2\,x - 1} = \sqrt{6\,x - 5} + \sqrt{2\,x - 9}$

586. $(4\,x+8)^{\frac{1}{2}} - (2\,x-12)^{\frac{1}{2}} = (6\,x-4)^{\frac{1}{2}}$

587. $\dfrac{3\sqrt{2\,x - 1} - 2\sqrt{x + 4}}{9} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$

588. $\sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{x + 2}}} = 4$

589. $\sqrt{2\,x + 10} + \sqrt{3\,x} = \dfrac{28}{\sqrt{2\,x + 10}}$

590. $\dfrac{\sqrt{2\,x} + \sqrt{8}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

Resolver las siguientes ecuaciones irracionales mediante el empleo de incógnitas auxiliares:

591. 1) $x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$

2) $x^2 + 4x - 6 = 2\sqrt{x^2 + 4x - 3}$

3) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 6x} = 24 - 6x$

4) $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$

5) $3x^2 - 7 + 3\sqrt{3x^2 - 16x + 21} = 16x$

Resolver los siguientes sistemas:

592. $x^2 + y^2 = 290$
$x + y = 24$

593. $x^2 + y^2 = 9$
$2x + y = 3$

594. $x^2 + y^2 = 13$
$y + 3 = 3x$

595. $x - 2y^2 = 0$
$y + 5 = 3x$

596. $x^2 + y^2 = 25$
$x - \frac{3}{4}y = 0$

597. $x^2 + 3xy = 22$
$x + y = 5$

598. $4x^2 - xy = 2(x+y)$
$y - x = 1$

599. $x^2 - xy + y^2 = 7$
$x + y = 5$

600. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$
$y = 1 + 2x$

601. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$
$x = 3y - 1$

* * *

602. $x^2 + y^2 = 61$
$xy = 30$

603. $x^2 + y^2 = 25$
$xy = -12$

604. $2x^2 - 5y^2 = 13$
$xy = -3$

605. $2x^2 + 3y^2 = 11$
$xy = 2$

606. $2x^2 - y^2 = -1$
$x^2 + 2y^2 = 22$

607. $2x^2 - 3y^2 = -6$
$4x^2 - y^2 = 8$

608. $x^2 + y^2 + 9x + 14 = 0$
$y^2 = 16 + 4x$

609. $x^2 - y^2 + 8 = 0$
$y^2 = 6x$

* * *

I. *Problemas para resolver por medio de una ecuación de segundo grado:*

610. Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto es 168.

611. Hallar dos números enteros cuya diferencia es 4 y su producto 117.

612. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 dm. más que su consecutivo. ¿Cuáles son las dimensiones de dicho rectángulo, si se sabe que su área equivale a 91 dm^2?

613. El área de un rectángulo es de 405 dm^2, y el perímetro 84 dm. Averiguar las dimensiones de ese rectángulo.

614. Un grifo tarda 10 minutos menos que otro en llenar un depósito, y los dos juntos tardan 12 minutos. ¿Cuánto tardará cada uno por separado?

615. Hallar un número que sumado con su raíz cuadrada dé 132.

616. Hallar dos números cuya suma es 74, sabiendo que la suma de sus raíces cuadradas es 12.

617. Dos grifos vierten a la vez en un depósito, y tardan en llenarlo 2 horas 24 minutos. ¿Cuánto tiempo empleará cada grifo en llenar dicho depósito, si se sabe que el segundo tarda 2 horas más que el primero?

618. Calcular los cuatro términos de una proporción continua, sabiendo que la suma de los dos primeros es 15 y la de los extremos 13.

619. Una persona coloca 30.000 ptas. a interés simple. Al cabo de un año retira el capital e interés producido y lo presta todo a un tanto por ciento que excede en 1 al que antes percibía. Su renta anual es entonces de 1.560 pesetas. ¿Cuál era el primer tanto por ciento?

620. Un jardín rectangular de 50 metros de largo por 34 de ancho, está rodeado por un camino de anchura uniforme. Calcular la anchura de dicho camino, si se sabe que su área es de 540 m^2.

621. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus longitudes, expresadas en dm., vienen dadas por tres números consecutivos.

622. Calcular dos números enteros consecutivos, sabiendo que la diferencia de sus cubos es 1.387.

623. Hallar las velocidades de dos trenes, sabiendo que uno de ellos recorre 18 Km. más por hora que el otro, y tarda 3 horas menos que éste en recorrer 420 Km. (Recuérdese que *espacio* = *velocidad* × *tiempo,* y por consiguiente, $v = \frac{e}{t}$ y $t = \frac{e}{v}$).

624. Dos ciclistas salen juntos para recorrer un trayecto de 112 kilómetros. El primero recorre 2 Km. por hora más que el segundo, por lo cual llega al destino 1 hora antes. Averiguar la velocidad de cada uno.

625. Si se rebajara en 3 ptas. el precio actual de la docena de huevos, con 72 ptas. podría comprar 4 huevos más que ahora. ¿A cómo se vende la docena de huevos?

626. Un ciclista ha recorrido 150 Km. Si hubiera llevado una velocidad de 5 kilómetros más por hora, la llegada al término del viaje se habría afectuado 2 horas y media antes. Averiguar el tiempo que empleó.

627. Un ciclista habría ganado una carrera, cuyo recorrido es de 24 Km., si hubiera podido sacar la media acostumbrada. Averiguar ésta, sabiendo que en los $\frac{2}{3}$ del recorrido resultó disminuida en 10 Km./h., y en 2 Km./h. en el resto del camino, y que el ciclista invirtió en total 42 minutos.

628. Un barquero sube por un río en un recorrido de 1.800 metros. Para bajar, emplea 9 minutos menos que en la subida, pues la corriente le hace aumentar la velocidad en 100 metros por minuto con respecto a la primera. ¿Cuál es el tiempo empleado en subir y bajar?

629. El perímetro de un triángulo rectángulo es 60 m., y el cateto menor tiene 16 m. menos que la hipotenusa. Hallar los tres lados del triángulo.

630. Hallar las dimensiones de un rectángulo cuya superficie es de 6 metros cuadrados, y la diagonal mide $\sqrt{13}$ metros.

631. Las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son entre sí como los números 3, 4 y 50. Calcular esas dimensiones y también el volumen, si el área total es 7'24 m^2.

632. Las dos cifras de un número suman 12. Si al cuadrado de dicho número se le suma 48, se obtiene el tercio del cuadrado del número que resulta al invertir el orden de las cifras del primero. ¿Cuál es ese número?

633. Una herencia de 405.000 ptas. había de repartirse entre cierto número de herederos. Tres de ellos son excluídos; por lo cual, la parte que corresponde a cada uno de los restantes se ve aumentada en 22.500 ptas. ¿Cuántos herederos había primeramente?

634. Preguntada una persona por su edad, contestó: «Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que hoy tengo». ¿Cuántos años tiene la citada persona?

635. Hallar dos números cuya diferencia es 10, y la de sus cubos 12.250.

636. La diferencia de las cuartas potencias de dos números es 1.776, y la suma de sus cuadrados 74. Hallar dichos números.

637. Escribir una proporción continua, sabiendo que la suma de sus tres términos distintos es 39, y que la diferencia entre los dos primeros es 6.

638. La media proporcional y la media aritmética de dos números que se diferencian en 32 están en la relación $\frac{3}{5}$. Hallar los números.

* * *

II. *Problemas para resolver mediante un sistema de ecuaciones de segundo grado.*

639. El producto de dos números es 4, y la suma de sus cuadrados, 17. ¿Cuáles son esos números?

640. Hallar una fracción equivalente a 5/7, cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1.184.

641. El área de un triángulo rectángulo es 120 dm^2, y la hipotenusa mide 26 dm. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

642. Al dividir un número compuesto de dos cifras por el producto de las mismas, se obtiene un cociente igual a 2; y al dividir el número que resulta al invertir el orden de las cifras, por la suma de éstas, el cociente obtenido es 7. ¿De qué número se trata?

643. Descomponer el número 365 en dos sumandos, de tal modo que sean los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

644. Un capital prestado a interés simple a un cierto rédito, se ha convertido al cabo de un año en 8.340 ptas. Aumentado el anterior capital en 1.000 ptas. y el rédito en 1 3/4, al cabo del mismo tiempo el nuevo capital se habría convertido en 9.540 ptas. Calcular el capital y el tanto por ciento primeros.

645. La suma de los radios de dos círculos es 113 cm., y la suma de las áreas de éstos es igual al área de un tercer círculo de 85 cm. de radio. ¿Cuál es el radio de los dos primeros círculos? [Área del círculo, $S = \pi r^2$; $\pi = 22/7$].

646. Dos trenes, que van en dirección opuesta, salen al mismo tiempo de las poblaciones *A* y *B*. Se cruzan en la ciudad *C*, situada 20 kilómetros más próxima de *B* que de *A*. Después de verificado el encuentro, el tren procedente de *A* tarda 96 minutos en llegar a *B*, y el otro emplea aún 2 horas 30 minutos para llegar a *A*. Se desea averiguar la velocidad de cada tren.

647. La suma de un número y el recíproco de otro es igual a 10'25, y la suma del segundo y el recíproco del primero equivale a 4'1. ¿De qué números se trata?

648. Los lados paralelos de un trapecio miden 25 centímetros y 36 centímetros, y los no paralelos, 13 y 20 centímetros. Calcular la altura del trapecio.

649. El área de un triángulo rectángulo es 96 cm^2, y la diferencia entre la suma de los catetos y la hipotenusa es 8 cm. Hallar la longitud de los lados del triángulo en cuestión.

650. Hallar dos números, tales que su suma, su producto y su cociente sean iguales entre sí.

651. Escribir una proporción en la que la diferencia de los extremos sea 7; la de los medios, 3; y la suma de los cuadrados de los cuatro términos sea 130.

652. En una proporción, la suma de los antecedentes es 12 y la de los consecuentes 9; la diferencia entre la suma de los cuadrados de los tres primeros términos y el cuadrado del cuarto es 107. Escribir la proporción.

653. Dos obreros trabajan juntos; el primero gana diariamente $\frac{1}{5}$ más que el segundo. Al cabo de cierto tiempo, el primero, que ha trabajado 5 días más que el segundo, recibió 1.000 ptas. y el segundo 600 ptas. ¿Cuánto gana diariamente cada uno?

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

12. El plano

62. Postulado del plano. — La superficie de un espejo, de una mesa, de una pared, de un estanque tranquilo, etc., dan idea de lo que es una *superficie plana*.

En Geometría supondremos que la superficie plana es *ilimitada* en todos sus sentidos, es decir, que se considera indefinidamente prolongada por todas partes. La superficie plana se denomina abreviadamente *plano*.

La propiedad fundamental del plano va enunciada por el siguiente

POSTULADO (*). — *Si una recta tiene dos puntos en un plano, toda ella está situada en dicho plano.*

Esta propiedad sirve para comprobar si una superficie es plana. Bastará aplicar el borde de una regla en todas las direcciones. Si todo el borde de la regla está contenido en la superficie, en cualquier dirección, la superficie es plana.

La mayoría de los objetos planos corrientes son porciones de plano de forma rectangular. Por esta razón y porque es imposible representar un plano indefinido, se conviene en representar a los planos por medio de *paralelogramos*, ya que esta es la forma que tienen aproximadamente los rectángulos vistos en perspectiva a cierta distancia.

Para designar a un plano, lo haremos generalmente por medio de una letra mayúscula. Así, diremos el plano P (fig. 6), el plano Q (fig. 7), etc. Si hubiera confusión al designarlo con una sola letra, emplearemos dos o tres. También es costumbre designar a los planos por medio de letras griegas: α, alfa; β, beta; γ, gamma; π, pi; ...

(*) *Postulados* o *axiomas* son aquellas proposiciones cuya certeza se admite sin razonarlas, ya sea por su propia evidencia o porque están de acuerdo con los resultados de la experiencia. Los postulados sirven de base para razonamientos posteriores.

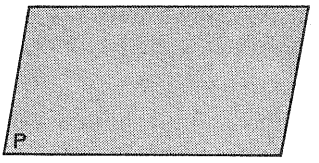


FIG. 6

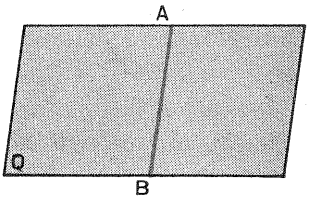


FIG. 7

63. Propiedades del plano. — 1.ª *Todo plano divide al espacio en dos regiones, situadas a una y otra parte del plano, de tal modo que no puede pasarse de una a otra sin atravesarlo.* Así, los puntos A y B (figura 8) están en la misma región; en cambio A y C se hallan en distinta región, y la recta AC que los une corta al plano P.

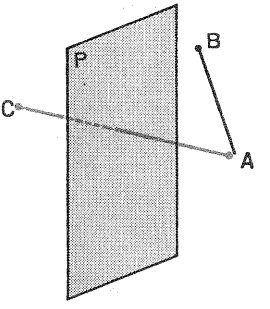


FIG. 8

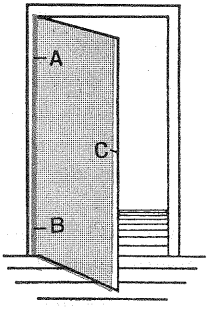


FIG. 9

2.ª *Toda recta trazada en un plano lo divide en dos semiplanos.* Ejemplo: la recta AB divide al plano Q (fig. 7) en dos semiplanos.

Por una recta pueden pasar infinidad de planos, v. gr.: las diferentes posiciones que ocupa una puerta al girar alrededor de la recta AB que determinan sus goznes (figura 9).

64. Diversas determinaciones de un plano. — Decir que ciertas condiciones determinan un plano, significa que existe un plano, y sólo uno, que las cumple. Un plano está determinado:

1.° *Por una recta y un punto exterior a ella.*

En efecto: por la recta puede pasar un plano. Haciendo girar este plano alrededor de la recta, llegará un momento en que alcanzará el punto; pero si continúa la rotación, dejará de contenerlo. Luego, por la recta y el punto sólo puede pasar un plano.

2.° *Por tres puntos no situados en una misma recta.*

Como dos puntos determinan una recta, este caso se reduce al anterior.

3.° *Por dos rectas que se cortan.*

En efecto: un punto de cada una de ellas y el de su intersección determinan un plano, según se acaba de explicar. Por otra parte, este plano contiene a cada una de las rectas, puesto que contiene a dos de sus puntos.

4.° *Por dos rectas paralelas.*

En efecto: dos rectas paralelas están, por definición, en un mismo plano, y cualquier otro plano que las contenga se confundirá con el primero, ya que pasa por una de las paralelas y por un punto de la otra.

65. Posiciones de una recta y un plano. — Una recta puede tener con relación a un plano las tres posiciones siguientes:

1.ª *Estar contenida en el plano*; se dice entonces que el plano pasa por la recta.

2.ª *Tener un sólo punto común con el plano*; en tal caso se dice que la recta corta al plano.

3.ª *No tener ningún punto común con el plano*; entonces la recta y el plano son paralelos.

66. Posiciones de dos rectas en el espacio. — Dos rectas en el espacio pueden ser:

1.° *Secantes*; están en un mismo plano y tienen un punto común (figura 10).

2.° *Paralelas*; están en un mismo plano y no tienen ningún punto común (fig. 11).

3.° *Cruzadas*, si no tienen ningún punto común y el plano determinado por una de ellas y un punto cualquiera de la otra no contiene a ésta (fig. 12).

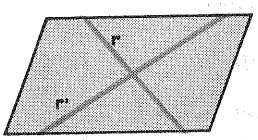


FIG. 10

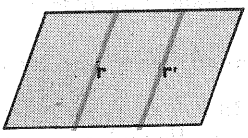


FIG 11

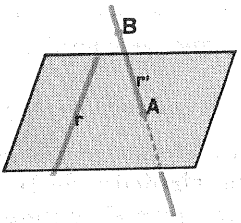


FIG 12

Llámase *ángulo de dos rectas que se cruzan,* al ángulo formado por dos rectas respectivamente paralelas a las primeras, trazadas desde un punto cualquiera del espacio; o también, al ángulo formado por una de las dos rectas y una paralela a la otra, trazada desde un punto de la primera.

Se dice que dos rectas que se cruzan son perpendiculares, cuando el ángulo que forman es recto.

67. Posiciones de dos planos. — Dos planos pueden ser:

1.° *Secantes,* cuando tienen una recta común.

2.° *Paralelos,* cuando no tienen ningún punto común.

68. Intersección de dos planos. — TEOREMA: *Si dos planos tienen un punto común, tienen común una recta que pasa por él* (fig. 13).

Hipot.:	*O* punto común a los planos *P* y *Q*.
Tesis:	recta *OM* común a los planos *P* y *Q*.

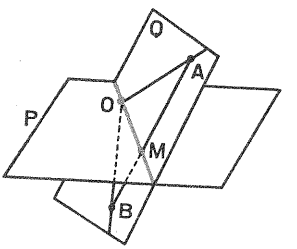


FIG. 13

Demostración. — Tracemos por *O* en el plano *Q* dos rectas cualesquiera *OA* y *OB*; unamos el punto *A* de la recta *OA*, situado en la parte superior del plano *P*, con el punto *B* de la recta *OB*, situado en la parte inferior de dicho plano.

El segmento *AB*, por la primera de las propiedades de un plano (número 63), corta a *P* en un punto *M* que es distinto de *O* (pues, de lo contrario, las dos rectas trazadas *OA* y *OB* coincidirían con *AB*).

Los planos *P* y *Q* tienen, por tanto, los puntos *O* y *M* comunes; luego, la recta *OM* está situada en ambos, como se quería demostrar.

La recta común a los planos *P* y *Q* se llama *intersección* de dichos planos, o *traza* de uno sobre otro.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

654. ¿Qué significa la frase «un plano queda determinado por ciertas condiciones»?

655. ¿Dos planos distintos pueden tener tres puntos comunes que no estén alineados?

656. Una mesa de 4 patas con una pata más larga o más corta que las restantes no se asienta. ¿Puede ocurrir que una mesa de 3 patas no se asiente? Relaciona esto con uno de los casos de determinación de un plano.

657. ¿Cuántos planos se pueden determinar con 4 puntos A, B, C y D, no situados en un mismo plano? ¿Cómo procederíamos para obtenerlos?

658. Suponiendo que 4 puntos A, B, C y D no se hallan en el mismo plano, ¿podrán 3 cualesquiera de ellos estar situados en línea recta?

659. Enunciar las diversas posiciones relativas que pueden presentar una recta y un plano.

660. ¿Qué posiciones relativas pueden ocupar dos rectas en el espacio?

661. ¿A qué se llama ángulo de dos rectas que se cruzan?

662. ¿Qué posiciones relativas pueden ocupar dos planos?

663. ¿Pueden tener dos planos distintos un arco común? Razonar la contestación.

13. Perpendicularidad de recta y plano

69. Recta y plano perpendiculares: teorema fundamental. — *Se dice que una recta es perpendicular o normal a un plano (y éste a la recta), cuando lo es a todas las rectas que pasan por su pie.*

El punto en que la perpendicular corta al plano se llama *pie de la perpendicular.*

TEOREMA. — *Si una recta que corta a un plano es perpendicular a dos de éste que pasan por su pie, dicha recta es perpendicular al plano* (figura 14).

Hipot.:	$MO \perp OA$ y OB del plano P.
Tesis:	$MO \perp$ al plano P.

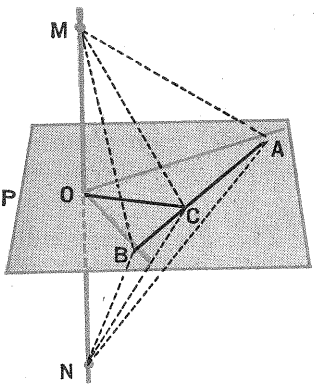


FIG. 14

Hay que demostrar que MO es perpendicular a cualquier recta del plano que pase por su pie, a OC por ejemplo.

Demostración. — Tomemos sobre la recta MO dos puntos M y N a distinto lado e igual distancia de P, es decir, de modo que sea $MO = NO$. Cortemos las rectas OA, OB y OC por una recta AB y tracemos los segmentos MA, MB, MC, NA, NB y NC. Tendremos:

$MA = NA$	por ser OA mediatriz de MN
$MB = NB$	por ser OB mediatriz de MN
$\triangle MAB = \triangle NAB$	por tener sus lados respectivos iguales
ang. MAB = ang. NAB	por ser ángs. homólogos de trs. iguales
$\triangle MAC = \triangle NAC$	por tener iguales dos lados y el ang. comp.
$MC = NC$	por ser lados homólogos de trs. iguales

$\therefore$ $OC \perp MN$ en su punto medio, por ser $MC = NC$

$\therefore$ $MO \perp OC$, y por tanto, lo es al plano P.

70. Consecuencias. — 1.ª *El lugar geométrico de las rectas perpendiculares a una dada, en uno de sus puntos, es un plano.*

En efecto: Toda recta del plano P que pasa por O es perpendicular a MN; pero como en cada uno de los planos que pasan por MN, solamente podemos trazar una perpendicular a MN, ésta será la intersección de dicho plano con P.

Por consiguiente, toda recta del plano P que pasa por O es perpendicular a MN, y recíprocamente, toda perpendicular a MN trazada por O pertenece al plano P.

2.ª *Si una recta, al cortar a un plano, es perpendicular a todas las rectas que pasan por la intersección, se cruza perpendicularmente con todas las demás rectas del plano que no pasan por la intersección.*

En efecto: cada una de estas rectas tiene una paralela que pasa por la intersección, a la cual es perpendicular la recta dada.

De esta segunda consecuencia se deduce, a su vez, que *una recta perpendicular a un plano es perpendicular a todas las rectas del plano, a unas por intersección y a otras por cruce.*

71. Plano perpendicular a una recta por un punto. — Problema: *Por un punto* C *trazar un plano perpendicular a una recta* AB.

1) *El punto* C *está en la recta* AB (fig. 15). Bastará trazar por el punto C dos rectas CD y CE perpendiculares a AB, y el plano P que determinan es el pedido.

En virtud de la primera de las anteriores consecuencias, cualesquiera que sean las rectas elegidas, todas estarán en el plano P. De otro modo: no hay más que un plano perpendicular.

2) *El punto* C *es exterior a la recta* AB (fig. 16). El punto C y la recta AB determinan el plano P, en el que podemos trazar una sola perpendicular CE a la recta AB. Si ahora en otro plano de los que pasan

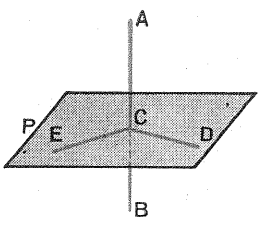


Fig. 15

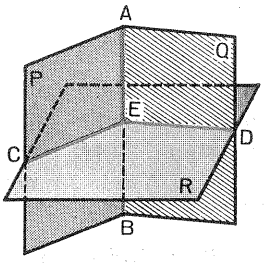


Fig 16

por AB, el Q por ejemplo, trazamos la perpendicular ED, ésta con la CE determinarán la posición del plano R buscado.

Como la perpendicular CE es única y el plano pedido debe contenerla, también éste será único, por lo que dijimos anteriormente.

En resumen: *Por un punto cualquiera del espacio se puede siempre trazar un plano perpendicular a una recta, y solamente uno.*

72. Teorema de las tres perpendiculares. — *Dada una recta* (AB, figura 17) *perpendicular a un plano* (P), *si por su pie* (B) *se traza la perpendicular a una recta* (CD) *del plano* (P), *la recta que une el pie* (E) *de esta perpendicular con un punto cualquiera* (A) *de la primera, es perpendicular a la recta* (CD) *del plano.*

Hipót.: $AB \perp P$ y $BE \perp CD$

Tesis: $AE \perp CD$

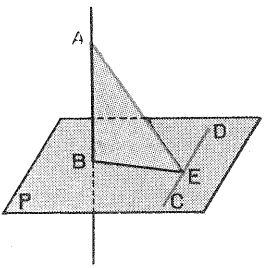


FIG. 17

Demostración. — Se tiene:

$CD \perp BE$ por hipótesis

$CD \perp AB$ por ser $AB \perp$ al plano P

$CD \perp ABE$ por ser $CD \perp$ a AB y BE del plano ABE

$\therefore$ $AE \perp CD$ por pertenecer AE al plano ABE.

Este teorema se conoce con el nombre de *teorema de las tres perpendiculares.*

73. Recta perpendicular a un plano por un punto. — PROBLEMA: *Por un punto dado* A, *trazar una recta perpendicular a un plano* P.

El punto A puede estar en el plano P (fig. 18) o ser exterior a dicho plano (fig. 19). En ambos casos, la construcción es análoga.

Tracemos en el plano P una recta cualquiera BC (que pase por A si este punto está en el plano P), y construyamos un plano Q perpendicular a BC, que pase por el punto A. Bastará ahora que levantemos en el plano Q la perpendicular AF a la intersección de los planos P y Q; dicha recta será perpendicular al plano P y, por tanto, solución del problema.

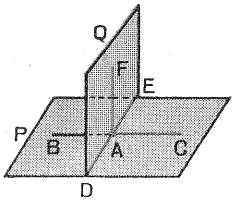


FIG. 18

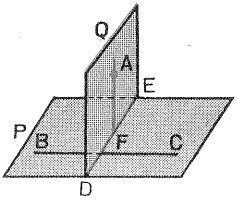


FIG. 19

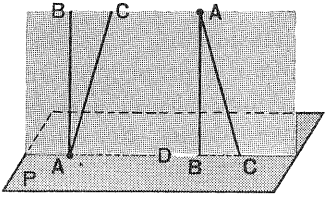


FIG. 20

En efecto: la recta AF es perpendicular a la BC, por pertenecer al plano Q; y como también lo es a DE, por construcción, lo será al plano que determinan, es decir, a P.

La solución es *única*, ya que si se pudieran trazar dos perpendiculares AB y AC (fig. 20), dichas perpendiculares determinarían un plano (64, 3.º) que cortaría al P según una recta (AD o bien BC); esta recta, por pertenecer al plano P, sería perpendicular a las AB y AC, lo cual es imposible.

En resumen: *Por un punto cualquiera del espacio se puede siempre trazar una recta perpendicular a un plano, y solamente una.*

CUESTIONES Y EJERCICIOS

664. Se sabe que una recta es perpendicular a otra de un plano. ¿Basta esto para asegurar que la recta es perpendicular al plano? Una recta es perpendicular a varias paralelas de un plano. ¿Es perpendicular al plano? Razonar las respuestas.

665. ¿Por qué el eje de una puerta giratoria es perpendicular al plano del suelo?

666. ¿Qué son entre sí dos rectas perpendiculares a un mismo plano? Demostrarlo.

667. Si una recta es perpendicular a infinitas rectas de un plano, ¿puede asegurarse que la recta es perpendicular al plano? Razonar la contestación.

668. Tenemos dos rectas perpendiculares. ¿Todos los planos que pasan por una de ellas son perpendiculares a la otra? Justificar la respuesta.

669. En un plano, dos rectas perpendiculares a una tercera, ¿pueden ser perpendiculares entre sí? ¿Y en el espacio? Poner un ejemplo que justifique las contestaciones.

14. Paralelismo

74. Paralelismo de rectas. — La definición de rectas paralelas dada en Geometría plana, sirve también para la Geometría del espacio; sólo que aquí se ha de expresar explícitamente la condición de estar las rectas en el mismo plano. Tendremos, por tanto, la siguiente definición:

Dos rectas son paralelas cuando, estando situadas en un mismo plano, no tienen ningún punto común.

Puede ocurrir que dos rectas no tengan ningún punto común y sin embargo no sean paralelas, por no estar en el mismo plano. Es lo que sucede con dos rectas que se cruzan (66).

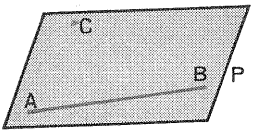


FIG. 21

TEOREMA. — *Por un punto exterior a una recta se puede trazar a ésta una paralela, y solamente una.*

En efecto: Supongamos (fig. 21) una recta AB y un punto C, exterior a ella. Toda paralela a AB que pase por C, tendrá que estar en el plano determinado por la recta AB y el punto C.

Luego, si la recta AB y el punto C están en un mismo plano, el teorema es cierto, como se demostró en Geometría plana.

75. Propiedades: TEOREMA 1.° — *Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra* (fig. 22).

Hipót.: $AB \parallel CD$, $P \perp AB$.
Tesis: $P \perp CD$.

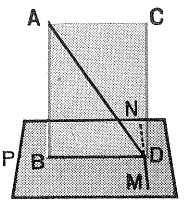


FIG. 22

El plano determinado por las dos paralelas AB y CD corta al plano P según una recta BD, que será perpendicular a AB y, por tanto, a su paralela CD (pues está en el mismo plano que AB). Si trazamos ahora en el plano P una recta MN perpendicular a BD, y unimos los puntos D y A, tendremos:

$MN \perp BD$ por construcción
$MN \perp AD$ por ser $MN \perp$ a AB y BD del plano ABD (72)
$CD \perp MN$ por pertenecer CD al plano ABD
$\therefore CD \perp P$ por ser $CD \perp$ a MN y BD del plano P.

TEOREMA 2.° — *Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí* (fig. 23).

Hipót.: AB y $CD \perp P$.
Tesis: $AB \parallel CD$.

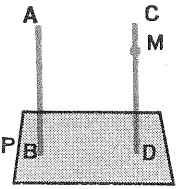


FIG. 23

Si por un punto M de la recta CD se traza una paralela a AB, dicha paralela es perpendicular al plano P (teor. 1.°). Pero esta paralela se confunde con CD, ya que desde un punto, sólo se puede trazar una perpendicular a un plano (73). Luego, $CD \parallel AB$.

TEOREMA 3.° — *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí* (fig. 24).

Hipót.: AB y $CD \parallel MN$.
Tesis: $AB \parallel CD$.

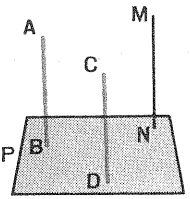


FIG. 24

Tracemos un plano P perpendicular a MN. Siendo P perpendicular a MN, lo es también a AB y CD (teor. 1.°). Por consiguiente, las rectas AB y CD son paralelas, por ser perpendiculares al mismo plano.

76. Paralelismo de recta y plano. — *Una recta es paralela a un plano (y viceversa) cuando no tienen ningún punto común.*

TEOREMA. — *Toda recta paralela a una recta de un plano, trazada por un punto exterior, es paralela a dicho plano* (fig. 25).

Hipót.: $AB \parallel CD$ del plano P.
Tesis: $AB \parallel$ al plano P.

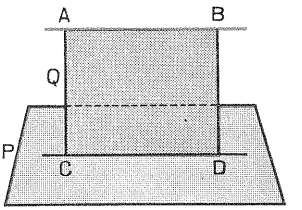


FIG. 25

Las rectas AB y CD, como paralelas que son, están en un mismo plano Q, cuya intersección con el P es la recta CD. Por consiguiente, si AB tuviera algún punto en el plano P, habría de estar en la recta CD. Pero AB y CD no tienen ningún punto común; luego, tampoco lo tendrán el plano P y la recta AB.

CONSECUENCIA. — Como desde un punto se pueden trazar paralelas a diversas rectas del plano y todas ellas serán paralelas a ese plano, resulta lo siguiente: *Por un punto exterior a un plano se pueden trazar a éste infinitas paralelas.*

77. Propiedades: TEOREMA 1.° — *Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por ella y corte al primero, lo hace según una recta paralela a la primera* (fig. 26).

Hipót.: $AB \parallel$ al plano P,
CD inters. de P y Q.
Tesis: $AB \parallel CD$.

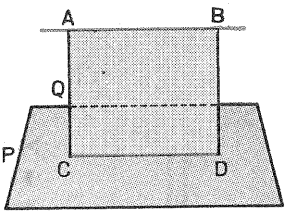


FIG. 26

Las rectas AB y CD están en un mismo plano Q y no tienen ningún punto común, puesto que si lo tuvieran no sería la recta AB paralela al plano P, que contiene a la recta CD. Luego, AB y CD son paralelas.

CONSECUENCIA. — *Las partes de paralelas comprendidas entre una recta y un plano paralelos son iguales.*

Así, $AC = BD$ (fig. 26). En efecto: las paralelas AC y BD determinan un plano que contiene a la recta AB y corta al plano P según la recta CD, paralela a AB. Luego, la figura $ABCD$ es un paralelogramo, y en consecuencia será $AC = BD$.

TEOREMA 2.° — *Si una recta es paralela a un plano, toda paralela a ella trazada por un punto del plano está contenida en él* (fig. 27).

Hipót.: $AB \parallel P$, C pertenece a P, $CD \parallel AB$.

Tesis: CD está contenida en P.

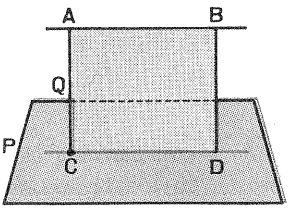


FIG. 27

La recta AB con el punto C determinan un plano Q que corta al P según una recta que es paralela a la AB (teor. 1.°). Pero por un punto C sólo puede trazarse una paralela a la recta AB. Luego, la paralela a AB por el punto C coincide con la intersección de los planos P y Q, y por consiguiente, está en el plano P.

CONSECUENCIA. — *Si una recta es paralela a dos planos que se cortan, lo es a su intersección* (fig. 28).

Si AB es paralela a los planos P y Q, decimos que también lo será a la intersección CD.

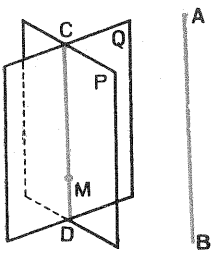


FIG. 28

En efecto: Si M es un punto cualquiera de la intersección CD de P y Q, trazando por él la paralela a AB, resulta, por el teorema anterior, que dicha paralela ha de pertenecer conjuntamente a P y a Q; luego, coincide con su intersección CD.

78. Paralelismo de planos. — *Se dice que dos planos son paralelos, cuando no tienen ningún punto común.*

TEOREMA. — *Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí* (fig. 29).

Hipót.: P y Q perpendiculares a AB.
Tesis: P paralelo a Q.

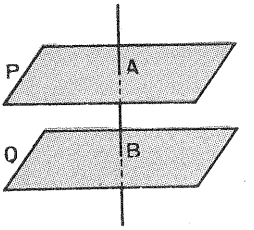


FIG. 29

Los planos P y Q no pueden tener ningún punto común, porque si lo tuvieran, desde él habría dos planos perpendiculares a la recta AB, lo cual es imposible (71). Luego, los planos P y Q son paralelos.

79. **Propiedades:** TEOREMA 1.° — *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son paralelas entre sí* (fig. 30).

Hipót.: $P \parallel Q$,
AB y CD sus inters.^{s} con R.
Tesis: $AB \parallel CD$.

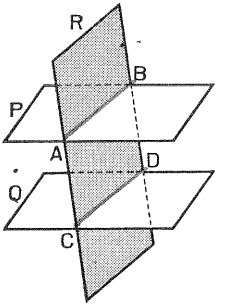


FIG. 30

Las rectas AB y CD están situadas en un mismo plano R y no pueden tener ningún punto común, porque de lo contrario lo tendrían los planos P y Q a que pertenecen. Luego, AB y CD reunen las condiciones que han de tener dos rectas paralelas.

TEOREMA 2.° — *Toda recta perpendicular a uno de dos planos paralelos, lo es también al otro* (fig. 31).

Hipót.: P paralelo a Q.
AB perpendicular a P.

Tesis: AB perpendicular a Q.

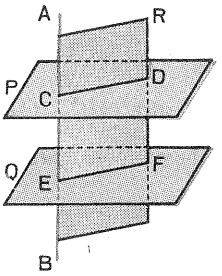


FIG. 31

Por la recta AB tracemos un plano R que corte a los planos P y Q. Las intersecciones CD y EF serán paralelas (teor. 1.°). Por otra parte, se tiene:

$AB \perp P$ por hipótesis
$AB \perp CD$ por pertenecer CD al plano P
$\therefore AB \perp EF$ por ser $EF \parallel CD$.

Del mismo modo se demostraría que AB es perpendicular a otra recta cualquiera del plano Q que pase por el punto E. Luego, $AB \perp Q$.

CONSECUENCIAS. — 1.ª *Por un punto exterior a un plano puede trazarse a éste un plano paralelo, y solamente uno.*

Trazando una perpendicular desde el punto al plano considerado, y construyendo luego el plano perpendicular a la recta, que pase por el mismo punto, tendremos un plano paralelo al primero.

Este plano es único, ya que si hubiera otro, tendríamos dos planos perpendiculares a una misma recta, trazados por el mismo punto, lo cual es imposible (71).

2.ª *Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.*

Supongamos dos planos P y Q, paralelos a un tercero R. Dichos planos P y Q serán paralelos entre sí, pues de lo contrario tendrían un punto común, y por él se podrían trazar dos planos paralelos a R, cosa imposible según la consecuencia anterior.

80. Segmentos de rectas comprendidos entre planos paralelos:

TEOREMA 1.° — *Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos son iguales* (fig. 32).

Hipót.: $MN \parallel M'N'$, $P \parallel Q$.

Tesis: $AB = A'B'$

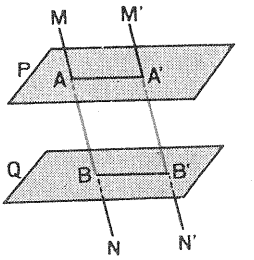


FIG. 32

Las rectas MN y $M'N'$ determinan un plano, cuyas intersecciones AA' y BB' con los planos P y Q son paralelas (79, 1.°). Por tanto, la figura $AA'B'B$ es un paralelogramo y sus lados opuestos AB y $A'B'$ son iguales.

TEOREMA 2.° — *Si tres o más planos paralelos cortan a dos rectas cualesquiera, los segmentos determinados en una de ellas, son proporcionales a sus correspondientes en la otra* (*) (fig. 33).

Hipót.: P, Q y R planos, paralelos, que cortan a MN y $M'N'$.

Tesis: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$

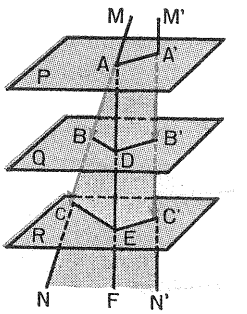


FIG. 33

(*) Este teorema corresponde al *teorema de Tales*, estudiado en la Geometría plana (ver Matemáticas 2.° curso, núm. 155).

Tracemos por el punto A una recta AF, paralela a $M'N'$. Las rectas MN y AF determinan un plano que corta a Q y R según dos rectas paralelas BD y CE, y aplicando el teorema de Tales, tendremos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \quad \text{de donde se deduce que} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

ya que, por lo antes demostrado (teor. 1.°), es $AD = A'B'$ y $DE = B'C'$.

81. Ángulos de lados paralelos: Teorema. — Dos ángulos que tienen los lados respectivamente paralelos, son iguales o son suplementarios:

1.° *Son iguales si tienen los lados dirigidos en el mismo sentido o en sentido contrario* (ángulos ABC y $A'B'C'$, figs. 34 y 35).

2.° *Son suplementarios si tienen dos lados dirigidos en igual sentido y otros dos en sentido contrario* (ángs. ABC y $A'B'C'$, fig. 36).

Si los ángulos se encuentran en el mismo plano, el teorema se demostró ya en Planimetría (*).

Suponemos ahora, por tanto, que los ángulos no están en el mismo plano. Si los lados tienen el mismo sentido, por ejemplo ABC y $A'B'C'$ (figura 34), el teorema se prueba porque, como estos dos ángulos determinan dos planos paralelos, basta trazar AA' y CC' paralelas a BB' para formar, uniendo A con C y A' con C', dos triángulos iguales ABC y $A'B'C'$. En efecto: tienen sus lados iguales por tratarse de segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas, y por ser AC y $A'C'$ lados opuestos de un mismo paralelogramo. Por tanto, si $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, los ángulos homólogos ABC y $A'B'C'$ serán iguales.

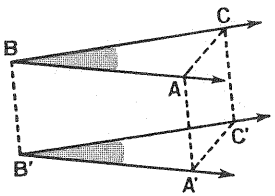


Fig. 34

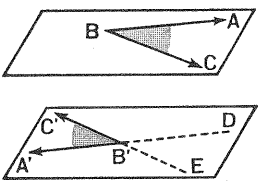


Fig. 35

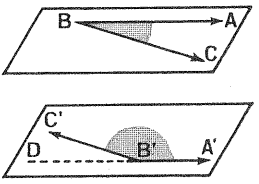


Fig. 36

(*) *Planimetría* o Geometría plana. La Geometría del espacio recibe también el nombre de *Estereometría*.

Si los lados están dirigidos en sentido contrario, como ocurre con los ángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 35), se prueba que son iguales, porque ambos son iguales al ángulo $DB'E$.

Finalmente, si se trata de dos ángulos cuyos lados son paralelos, pero dos de ellos dirigidos en sentido contrario, como los ABC y $A'B'C'$ (figura 36), se prueba que son suplementarios por serlo $A'B'C'$ y $DB'C'$, ángulo éste último que acabamos de probar es igual al ABC.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

670. ¿Todas las rectas paralelas a un plano son paralelas entre sí? Razonar la respuesta.

671. Por un punto dado, ¿cuántas paralelas se pueden trazar a un plano dado? ¿Cuántos planos paralelos a una recta dada pasan por un punto? Razonar la contestación.

672. Si trazamos varios planos por una recta r, paralela a un plano P, ¿qué posición tendrán entre sí las intersecciones de dichos planos con el plano P? Razonar la contestación.

673. ¿Por qué son paralelas las aristas laterales de una habitación?

674. Por un punto P, ¿cómo trazaremos una paralela a dos planos A y B no paralelos?

675. Dos paralelas a la misma recta, ¿cómo son entre sí? Razonar la respuesta.

676. Dos planos paralelos a una recta, ¿son paralelos entre sí? Razonar la contestación.

677. Si dos planos que se cortan son paralelos a una recta, ¿cómo son entre sí la recta y la intersección de dichos planos? Razonar la contestación.

678. Dos planos perpendiculares a una misma recta, ¿son siempre paralelos entre sí? ¿Por qué?

679. Probar que dos ángulos de lados paralelos, no situados en el mismo plano, pertenecen a planos paralelos.

15. Angulo diedro

82. Ángulos diedros: igualdad y desigualdad. — De la misma manera que dos semirrectas con el origen común dividen al plano en dos regiones llamadas ángulos, dos semiplanos que parten de una misma recta dividen al espacio en dos regiones llamadas *ángulos diedros* o simplemente *diedros*.

DEFINICIÓN. — *Ángulo diedro es la parte de espacio limitada por dos semiplanos que parten de una misma recta.*

A los semiplanos se les denomina *caras* del diedro, y a la recta común *arista* del diedro.

Un ángulo diedro se designa por cuatro letras mayúsculas, colocadas una en cada cara y dos en la arista, mencionando estas últimas entre las otras dos. Así, diremos el diedro *ABCD* (fig. 37). Si el diedro no tiene la arista común con ninguno otro, puede designársele por las letras de la arista solamente, o por una letra o un número. Asimismo, se suelen nombrar con las dos letras correspondientes a los semiplanos que lo forman.

Según hemos dicho, son dos las partes del espacio limitadas por los semiplanos y, por tanto, dos los diedros que forman. Se denomina *cóncavo* al que contiene la prolongación *BCE* de una cara, hecha por la arista (fig. 38), y *convexo* al que no la contiene (fig. 39). En general, sólo nos ocuparemos de los diedros convexos; por lo que, de no advertir lo contrario, al designar un diedro, siempre nos referiremos al convexo.

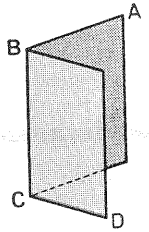


FIG. 37

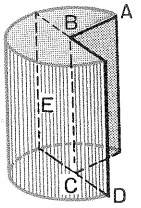


FIG. 38

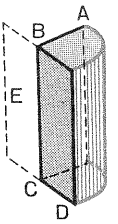


FIG. 39

Si los dos semiplanos (caras) forman un solo plano, como éste también divide al espacio en dos regiones, se dice que el ángulo diedro es *llano*. Es decir, que *denominamos diedro llano a un diedro cuyas caras son prolongación una de otra.*

DIEDROS IGUALES Y DIEDROS DESIGUALES. — Podemos materializar un diedro doblando una hoja de cartón o cartulina. Si al superponer dos diedros así materializados, vemos que coinciden las caras de uno con las del otro, diremos que ambos diedros son *iguales*. En la figura 40 se representan dos diedros iguales.

Plano bisector de un ángulo diedro es el que conteniendo a la arista divide al diedro en dos diedros iguales.

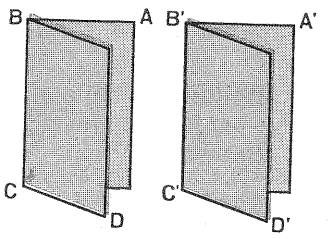


FIG. 40

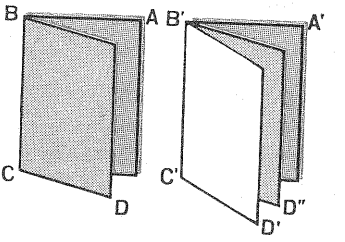


FIG. 41

Si por el contrario, sucede que, después de hacer coincidir la arista y una de las caras, la otra cara del primer diedro cae dentro de las del segundo, diremos que el primero es menor que el segundo o éste mayor que aquél. Así, en la fig. 41, el diedro *ABCD*, que es igual al *A'B'C'D''*, será menor que el *A'B'C'D'*.

Como dos diedros llanos siempre coinciden, diremos que *todos los diedros llanos son iguales*. Asimismo, se deduce fácilmente que *un diedro convexo es menor que un llano* y *un diedro cóncavo es mayor que un llano*.

83. Ángulo rectilíneo de un diedro. — Sea un diedro *ABCD* (figura 42). Por un punto *O* de la arista tracemos dos perpendiculares a dicha recta, una en cada cara. El ángulo *MON* formado por estas dos perpendiculares se llama *ángulo rectilíneo correspondiente al diedro.*

Si tenemos en cuenta que las dos rectas trazadas determinan el plano perpendicular a la arista por el punto elegido, podemos dar también la siguiente

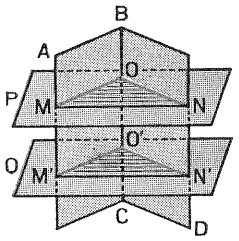


FIG. 42

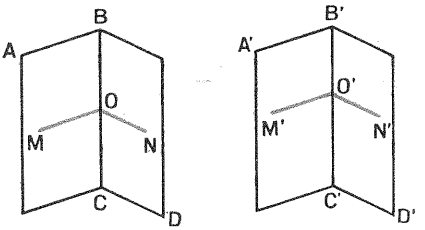


FIG. 43

DEFINICIÓN. — *Ángulo rectilíneo correspondiente a un diedro es el ángulo formado por las intersecciones de las dos caras con un plano perpendicular a la arista.*

Por esta razón se llama también a dicho ángulo *sección normal* del diedro.

A un ángulo diedro se le pueden trazar infinitos rectilíneos, pero *todos ellos son iguales,* porque tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Así, $MON = M'O'N'$ (fig. 42).

A diedros iguales corresponden ángulos rectilíneos iguales. En efecto: sean dos diedros iguales *ABCD* y *A'B'C'D'* (fig. 43). Llevando uno sobre otro, podemos hacer que coincidan sus caras y los vértices *O* y *O'* de dos de sus ángulos rectilíneos *MON* y *M'O'N'*. Ahora bien: como por un punto no hay más que una perpendicular a la arista en cada cara, vemos que los dos ángulos rectilíneos han de coincidir.

84. Operaciones con diedros. — *Suma de diedros.* Consideremos dos diedros *ABCD* (fig. 44) y *EFGH* (fig. 45). Si hacemos que la arista y una de las caras del primero coincidan con la arista y una de las caras del segundo, de manera que las caras no comunes queden a distinto lado de la cara común, diremos que el diedro *ABCH* (fig. 46) formado por las caras no comunes es la suma de los diedros dados.

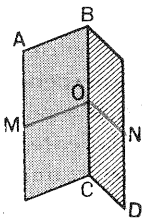


FIG. 44

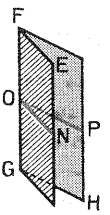


FIG 45

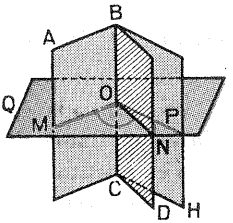


FIG. 46

Suma de varios diedros es el diedro que se obtiene sumando dos de ellos, el resultado con el tercero, la suma hallada con el cuarto, y así sucesivamente hasta operar con el último.

TEOREMA. — *Si un diedro es igual a la suma de otros dos, el rectilíneo correspondiente al primero es igual a la suma de los rectilíneos correspondientes a los otros dos* (figuras 44, 45 y 46).

Hipót.: diedro $ABCH$ = diedro $ABCD$ + diedro $EFGH$.

Tesis: rectilíneo MOP = rectilíneo MON + rectilíneo NOP.

Trazando un plano Q perpendicular a la arista BC (fig. 46), sus intersecciones con las caras de los diedros serán OM, ON y OP, verificándose que

$$\text{áng. } MOP = \text{áng. } MON + \text{áng. } NOP.$$

Pero MOP es el rectilíneo correspondiente al diedro $ABCH$, MON es el rectilíneo correspondiente al diedro $ABCD$, y NOP es el rectilíneo correspondiente al diedro $EFGH$. Luego, queda demostrado lo que nos proponíamos.

Diferencia de diedros. Llamamos diferencia entre un diedro y otro menor que él, al diedro que sumado al segundo da por resultado el primero.

EJEMPLO (fig. 47):

$$ABCD - EFGH = ABCH'$$

pues

$$ABCH' + EFGH = ABCD$$

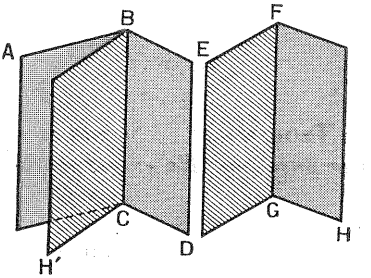


FIG. 47

Diedros múltiplos y submúltiplos de otro. Multiplicar un ángulo diedro por un número n es hallar otro diedro igual a la suma de n diedros iguales al dado.

Del diedro que resulta diremos que es *múltiplo* del primero, y de éste que es *submúltiplo* del segundo.

85. Proporcionalidad entre los diedros y sus rectilíneos correspondientes. — En los párrafos anteriores (83 y 84) hemos deducido estas dos relaciones:

1.ª *A diedros iguales corresponden ángulos rectilíneos iguales.*

2.ª *A un diedro suma de otros dos le corresponde un rectilíneo suma de los rectilíneos correspondientes a los otros dos.*

Vemos, pues, que las dos magnitudes, ángulo diedro y ángulo rectilíneo, se corresponden *en la igualdad* y *en la suma*, por lo que cumplen las condiciones que han de tener dos magnitudes para que sean directamente proporcionales.

La medida de un diedro es igual a la medida de su rectilíneo correspondiente, si se toma por unidad de diedros el diedro que corresponde a un ángulo rectilíneo unidad.

86. Perpendicularidad de planos: propiedades. — *Se dice que dos planos son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro diedros iguales* (fig. 48). Entonces se llama diedro *recto* al formado por dos caras perpendiculares.

De dos planos que se cortan y no son perpendiculares, se dice que son *oblicuos* (fig. 49).

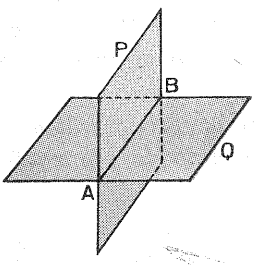


FIG. 48

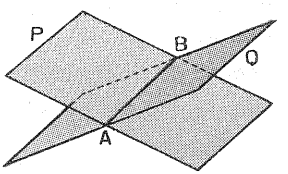


FIG. 49

TEOREMA 1.° — *Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero* (fig. 50).

Hipót.: $AB \perp P$	Tesis: $Q \perp P$

Trazando la recta *BC* perpendicular a *MN* en el plano *P*, resulta que el ángulo *ABC* es el rectilíneo correspondiente al diedro *PMNQ*. Pero como *AB* es perpendicular a todas las rectas del plano *P* (69), lo será

a BC. Por tanto, tendremos que el ángulo ABC es recto, y en consecuencia, también lo será el diedro $PMNQ$, lo cual significa que el plano Q es perpendicular al P.

TEOREMA RECÍPROCO. — *Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a la intersección trazada en uno de ellos es perpendicular al otro* (fig. 50).

Hipót.: $P \perp Q$, $AB \perp MN$	Tesis: $AB \perp P$

Si trazamos en el plano Q una recta AB perpendicular a la intersección MN, como esa recta AB es también perpendicular a BC, por ser recto el ángulo ABC, dicha recta AB será perpendicular al plano P.

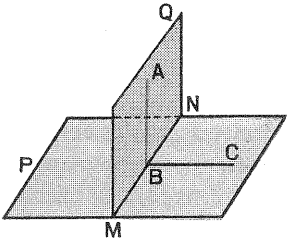


FIG. 50

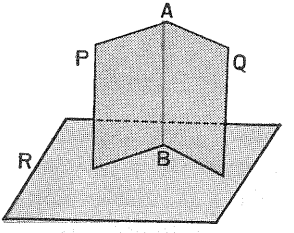


FIG. 51

CONSECUENCIA. — *Cuando dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a uno, trazada por un punto del otro, está contenida en éste.*

En efecto: Sean P y Q (fig. 50) los planos perpendiculares. Si por el punto elegido A se traza en el plano Q la perpendicular a la intersección MN, dicha perpendicular AB lo es al plano P y ha de confundirse con la perpendicular a que se refiere el enunciado, ya que desde un punto a un plano sólo hay una perpendicular.

TEOREMA 2.° — *Si dos planos que se cortan son perpendiculares a un tercero, su intersección es perpendicular a ese tercer plano* (fig. 51).

Hipópt.: P y $Q \perp R$; AB inters. de P y Q	Tesis: $AB \perp R$

En efecto: según la consecuencia anterior, la perpendicular al plano R por un punto A común a P y Q, pertenece a cada uno de dichos planos, por lo que se confundirá con la intersección.

87. Ángulo plano y ángulo diedro suplementario. — Un diedro y un ángulo son suplementarios cuando lo son el ángulo y el rectilíneo correspondiente al diedro.

TEOREMA. — *Si desde un punto interior a un diedro se trazan las perpendiculares a las caras, el ángulo que forman esas perpendiculares es suplementario del diedro* (fig. 52).

Hipót.: $OC \perp P$; $OD \perp Q$.

Tesis: $COD + CED = 2$ rectos

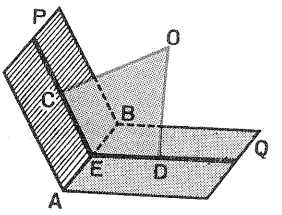


FIG. 52

El plano *COD* es perpendicular a los planos *P* y *Q*, puesto que pasa por las rectas *OC* y *OD* (86, teor. 1.°); y, como consecuencia, será perpendicular a la intersección *AB* (86, teor. 2.°). Luego, el plano *COD* determina en el diedro una sección recta *CED*.

La suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero *CODE* es igual a 4 rectos, y como tiene rectos los ángulos *C* y *D*, tendremos que

$$COD + CED = 2 \text{ rectos}$$

88. Clasificación de los diedros. — *Diedro recto, diedro agudo* y *diedro obtuso*, son los diedros que tienen por ángulos rectilíneos, respectivamente, un ángulo recto, un ángulo agudo y un ángulo obtuso.

Diedros complementarios y *diedros suplementarios*, son los que sumados valen, respectivamente, un diedro recto y un diedro llano o dos diedros rectos.

Diedros consecutivos. Se dice de dos diedros que son consecutivos cuando tienen la arista y una cara común y las otras dos a distinto lado de la común. Ejemplo, los diedros *ABCD* y *DBCE* de la figura 53. El diedro *ABCE* que forman las caras no comunes es la suma de los dos consecutivos.

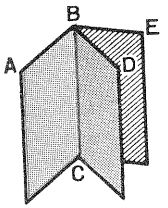


FIG. 53

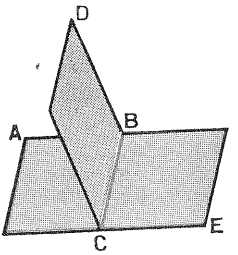


FIG. 54

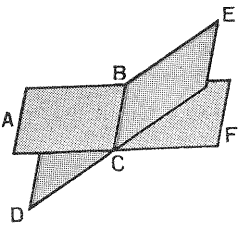


FIG. 55

Diedros adyacentes son dos diedros consecutivos cuyas caras no comunes están en el mismo plano. Ejemplo, los *ABCD* y *DBCE* (fig. 54). Dos diedros adyacentes suman un diedro llano y son, por tanto, suplementarios.

Diedros opuestos por la arista son aquellos que tienen la misma arista y las caras de uno son prolongación de las caras del otro. Ejemplo, los *ABCD* y *EBCF* (fig. 55). Los diedros opuestos por la arista son iguales entre sí, puesto que las secciones normales son ángulos opuestos por el vértice y, por consiguiente, iguales entre sí.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

680. ¿Qué es ángulo diedro? ¿A qué se llama rectilíneo de un diedro? ¿Son iguales todos los rectilíneos de un diedro?

681. ¿Son proporcionales los ángulos diedros a sus rectilíneos correspondientes? Razonarlo y explicar cómo se mide un diedro.

682. La sección de un diedro por un plano, ¿da siempre el mismo ángulo? ¿Qué es sección normal?

683. ¿Cómo son entre sí dos rectas perpendiculares a un mismo plano? ¿Y dos planos perpendiculares a una misma recta? ¿Y dos planos perpendiculares a un mismo plano?

684. ¿Cuántos planos perpendiculares a otro se pueden trazar por una recta, según sea ésta oblicua o perpendicular al plano?

685. ¿Cuántos planos perpendiculares a otro se pueden trazar por un punto? ¿Por qué?

686. La recta r es perpendicular a otra s contenida en el plano P al que no es perpendicular. ¿Todos los planos que pasan por r son perpendiculares a P? Razonar la respuesta.

687. Dados un plano y una recta del mismo, ¿cuántos planos pueden pasar por la recta que sean perpendiculares al plano dado? ¿Por qué?

688. Si dos planos son perpendiculares, ¿todas las rectas situadas en uno de ellos son perpendiculares al otro? Justificar la respuesta y dibujar la figura.

689. Un diedro mide 29° 37′ 43″. Hallar la medida del rectilíneo del diedro adyacente y explicar en qué hay que fundarse para obtenerla.

690. ¿Qué ángulo forman los planos bisectores de dos diedros adyacentes?

691. ¿Qué posición tienen entre sí los planos bisectores de dos diedros opuestos por la arista?

692. Dibujar un plano P inclinado respecto a un plano horizontal. ¿Contiene el plano P rectas horizontales? ¿Y verticales? Razonar las respuestas.

693. Dos planos se cortan de modo que uno de los diedros formados mide 54° 32′ 15″. ¿Cuánto miden los otros tres?

694. ¿Cuánto mide un diedro cuyo complemento es los $\frac{2}{3}$ de un diedro de 28° 30′ 54″?

695. Tres diedros consecutivos tienen en un mismo plano las caras del primero y del tercero no comunes con el segundo. ¿Cuánto vale el tercero de dichos ángulos si el primero mide 92° 26′ 25″ y el segundo es los $\frac{2}{5}$ del primero?

696. ¿Cuánto mide un diedro cuyo complemento es los $\frac{3}{4}$ de la diferencia entre dos diedros que miden 103° 3′ y 48° 57′ 32″?

16. Distancias y ángulos

89. Perpendiculares y oblicuas. — De una recta que corta a un plano sin serle perpendicular, se dice que es *oblicua* a ese plano.

TEOREMA. — *Si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste una perpendicular y varias oblicuas:*

1.° *La perpendicular es menor que cualquier oblicua.*

2.° *Dos oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales.*

3.° *De dos oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquella cuyo pie esté más alejado.*

Hipót.: $AB \perp P$
AC, AD, AE oblicuas
$BC = BD$ y $BE > BC$

Tesis: $AB < AC$
$AC = AD$ y $AE > AC$

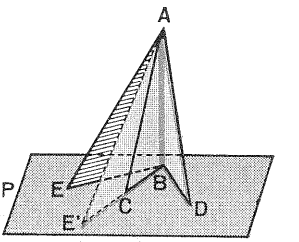


FIG. 56

Demostración. — Se tiene (fig. 56):

1.° $AB < AC$ por ser AC hipotenusa del tr. rect. ABC

2.° $BC = BD$ por hipótesis
$\triangle ABC = \triangle ABD$ por tener los dos catetos iguales
$\therefore AC = AD$ por ser lados homólogos de triángulos iguales

3.° Prolonguemos BC hasta tener $BE' = BE$ y unamos A con E'

$AE' = AE$ por ser $BE' = BE$
$AE' > AC$ por ser $BE' > BC$ en el plano ABE'
$\therefore AE > AC$ por ser $AE = AE'$.

TEOREMA RECÍPROCO. — 1.° *La recta más corta que puede trazarse desde un punto a un plano es la perpendicular.*

Esta perpendicular representa la *distancia* del punto al plano.

2.° *Si dos oblicuas a un plano, trazadas desde el mismo punto, son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular del punto al plano.*

En efecto: de lo contrario, la desigualdad de las distancias traería consigo la desigualdad de las oblicuas, y esto se opone a la hipótesis.

3.° *Si dos oblicuas a un plano, trazadas desde un mismo punto, son desiguales, el pie de la mayor dista más del pie de la perpendicular.*

En efecto: no puede distar menos que la otra, ni equidistar del pie de la perpendicular, porque sería menor que la otra, o le sería igual, lo que es contrario a la hipótesis.

CONSECUENCIA. — *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de un punto exterior, es una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada al plano por el punto exterior considerado* (fig. 57). El radio de dicha circunferencia será

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$$

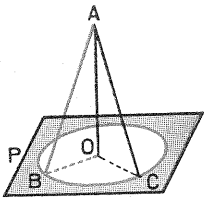


FIG. 57

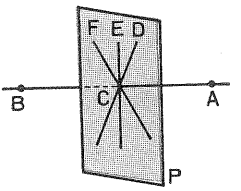


FIG. 58

90. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de otros dos fijos en el espacio. — Sean A y B dos puntos (fig. 58) y AB el segmento que los une.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y B en cada uno de los planos que pasan por la recta AB, es la mediatriz del segmento AB contenida en ese plano; pero a su vez, el lugar geométrico de todas esas mediatrices, como CD, CE, CF, etc., es el plano P perpendicular al segmento AB en su punto medio.

Luego, *el lugar geométrico de los puntos equidistantes de otros dos fijos es el plano perpendicular al segmento que los une, trazado por su punto medio.*

91. Distancia entre dos planos paralelos. — Sean dos planos P y Q paralelos (fig. 59). Todas las perpendiculares trazadas a uno de ellos por puntos del otro, son rectas paralelas entre sí y, por consiguiente, los segmentos de las mismas comprendidos entre ambos planos serán iguales (80). Además, dichos segmentos son los menores que pueden existir limitados por los dos planos, pues cualquier segmento de oblicua será mayor (89). De ahí que digamos:

Cuando dos planos son paralelos, todos los puntos de uno equidistan del otro.

Distancia entre dos planos paralelos es el segmento de perpendicular a dichos planos y limitado por ellos.

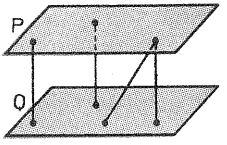


FIG. 59

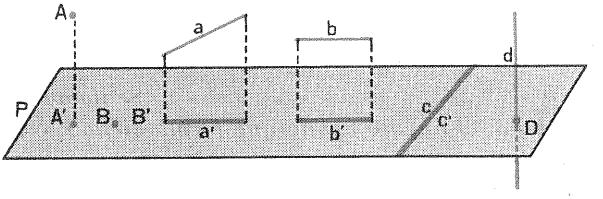


FIG. 60

92. Proyección de un punto y de una recta sobre un plano. — Dado un plano P (fig. 60), se llama *proyección de un punto* A sobre dicho plano al punto A', pie de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

Al plano P suele llamársele *plano de proyección*, y a la perpendicular AA' *rayo proyectante.*

La proyección de un punto B del plano es el mismo punto.

Proyección de una recta. Si se proyectan los puntos de una recta no perpendicular al plano de proyección, todos los rayos proyectantes estarán situados en el plano perpendicular al plano de proyección trazado por la recta. Según esto, diremos:

Proyección de una recta no perpendicular al plano de proyección es la traza o intersección del plano perpendicular trazado por la recta.

La proyección de una recta *d* perpendicular al plano de proyección es su traza *D* o pie sobre dicho plano.

Si en lugar de una recta indefinida, lo que proyectamos es un segmento, obsérvese lo siguiente:

1.° Si el segmento *a* es oblicuo al plano, la proyección *a'* es menor que el segmento.

2.° Si el segmento *b* es paralelo al plano o está contenido en él, la proyección *b'* es igual al segmento.

3.° Si el segmento *d* es perpendicular al plano, la proyección *D* es un punto.

93. Distancia entre una recta y un plano paralelos. — Como la proyeccción de una recta sobre un plano paralelo es otra recta paralela a la dada, diremos:

Distancia entre una recta y un plano paralelos es la que existe entre la recta y su proyección sobre el plano, o sea, el segmento de perpendicular común a la recta y a su proyección.

94. Ángulo de recta y plano. — *Se llama ángulo de una recta con un plano, al ángulo agudo que forma dicha recta con su proyección sobre el plano.*

Así, el ángulo de la recta *a* con el plano *P* (fig. 61) será *AOA'*, formado por la recta *a* y su proyección *a'*.

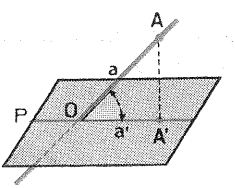


FIG. 61

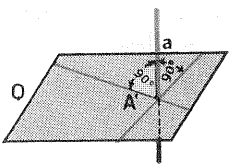


FIG. 62

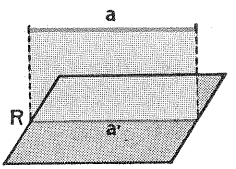


FIG. 63

Si la recta es *perpendicular* al plano (fig. 62), forma ángulo recto con todas las del plano que pasan por su pie, y se dice entonces que la recta forma ángulo *recto* con el plano.

Si la recta es *paralela* al plano (fig. 63), aunque no forma ángulo con él, suele decirse que forma ángulo *nulo*.

TEOREMA. — *El ángulo de una recta con un plano es menor que cualquiera de los ángulos formados por dicha recta con otra cualquiera del plano que pase por su pie* (fig. 64).

Hipót.: AB' proyección de AB; AC recta cualquiera trazada por A en P.

Tesis: áng. $BAB' <$ áng. BAC

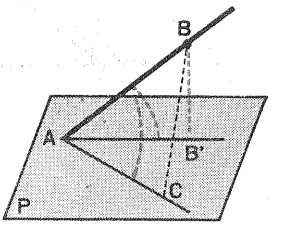


FIG. 64

Tomemos en AC una longitud $AC = AB'$ y tracemos la recta BC.

$BB' < BC$ por ser $BB' \perp P$ y BC oblicua.

Luego, los triángulos ABB' y ABC tienen dos lados respectivamente iguales y los terceros desiguales. Por consiguiente, áng. $BAB' <$ áng. BAC.

95. Recta de máxima pendiente. — Sea el plano P (fig. 65), inclinado sobre el plano horizontal H, y sea BC su traza. Por un punto A del plano P tracemos la recta AM perpendicular a t. Esta recta AM es una *recta de máxima pendiente* del plano P.

El por qué de esta denominación lo entenderemos si demostramos que cualquiera otra recta AN, oblicua a BC, forma con H un ángulo menor que la AM. En efecto: tracemos AA' perpendicular al plano H, así como $A'M$ y $A'N$, que son las respectivas proyecciones de AM y AN en el plano H. Sobre $A'N$ llevemos una longitud $A'D = A'M$ y tracemos AD. Se tiene:

$\triangle AA'M = \triangle AA'D$ por tener los catetos respect. iguales
$\angle AMA' = \angle ADA'$ por ser homólogos de trs. iguales
$\angle ADA' > \angle ANA'$ por ser $A'D < A'N$
$\therefore \angle AMA' > \angle ANA'$ por ser $\angle AMA' = \angle ADA'$

96. Distancia entre dos rectas que se cruzan. — *Llamamos distancia entre dos rectas que se cruzan, a la distancia entre una de ellas y el plano paralelo a ella trazado por la otra.*

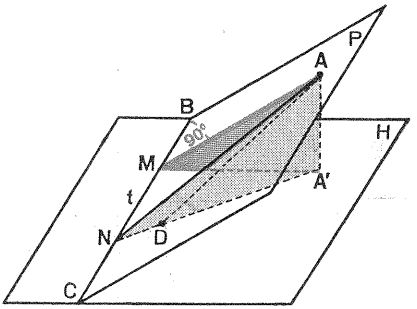


FIG. 65

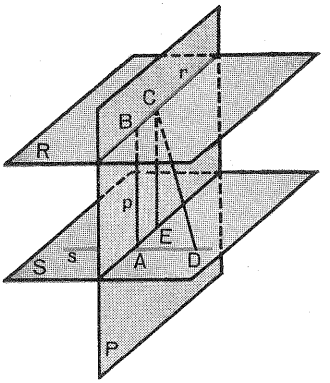


FIG. 66

Esta distancia es menor que cualquier otro segmento que vaya de un punto de una recta a un punto de la otra.

Sean r y s las rectas (fig. 66). Tracemos el plano R que pase por r y sea paralelo a s y el plano S que pase por s y sea paralelo a r. Dibujemos luego el plano P que pase por r y sea perpendicular al S. Sea A la intersección de P con s. La recta p, perpendicular al plano S en A, cortará a r en un punto B. El segmento AB es la distancia pedida.

Cualquiera otra recta, CD por ejemplo, que una dos puntos de r y s es mayor que AB. En efecto: si trazamos $CE \parallel BA$, tendremos

$CD > CE$, por ser CE perpendicular al plano S y CD oblicua,

y como $CE = BA$, por partes de paralelas comprendidas entre paralelas, será $CD > BA$. Luego, AB es la *mínima distancia* entre r y s.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

697. De todos los puntos de un plano, ¿cuál es el más próximo a un punto situado fuera de él?

698. ¿Cuántas oblicuas iguales se pueden trazar a un plano por un punto exterior? ¿Qué diferencia existe con la proposición correlativa en la Geometría plana?

699. Queremos montar una tienda de campaña de forma cónica. El mástil central mide 3'90 m. y los tirantes oblicuos 7'10 m. ¿A qué distancia de la base del mástil habrá que sujetar los tirantes?

700. Calcular la longitud de la circunferencia de la base de una tienda cónica de un circo, sabiendo que el eje vertical mide 4'60 m. y los cables oblicuos 7'25 m.

701. Si un segmento es paralelo a un plano, ¿cuánto mide su proyección sobre dicho plano? ¿Y si es perpendicular? ¿Y si está contenido en él? Aclarar las respuestas con las figuras correspondientes.

702. Si dos rectas son paralelas entre sí y a un mismo plano, ¿cómo son entre sí sus proyecciones sobre ese plano? Justificar la contestación.

703. Si se apoya un cateto de una escuadra sobre el plano de una mesa, ¿con qué semirrecta de ese plano formará la hipotenusa de la escuadra el ángulo mínimo? ¿Y el máximo?

704. Trazar en un plano inclinado la recta de máxima pendiente.

705. Dibujar un tejado de dos vertientes y señalar la recta de máxima pendiente.

706. Definir rectas que se cruzan. Dibujar dos rectas cruzadas y explicar cómo se determinaría la distancia entre ellas.

707. Indicar en una habitación cuál es la distancia entre dos aristas cruzadas, una del piso y otra del techo, o de dos paredes opuestas.

17. Simetrías

97. Simetrías respecto a un punto, eje o plano. — Se dice que dos puntos A y A' (fig. 67) son simétricos respecto a un tercero O, llamado *centro de simetría*, cuando O es el punto medio del segmento AA' que los une.

Dos puntos A y A' (fig. 68) son simétricos respecto a una recta MN, llamada *eje de simetría*, cuando este eje es mediatriz del segmento AA' que los une.

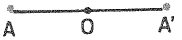


FIG 67

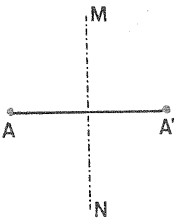


FIG. 68

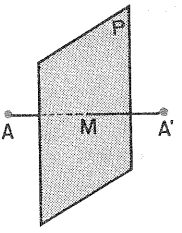


FIG. 69

Dos puntos A y A' (fig. 69) son simétricos respecto a un plano P, llamado *plano de simetría*, cuando este plano es perpendicular a la recta que pasa por ellos en el punto medio M del segmento AA' que los une.

Dos figuras son simétricas respecto a un punto, a un eje o a un plano, cuando cada punto de una tiene su simétrico en la otra.

EJEMPLOS. — Los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 70) son simétricos respecto al punto O. Los arcos ABC y $A'B'C'$ (fig. 71) son simétricos respecto al eje MN. Los tetraedros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ (fig. 72) son simétricos respecto al plano P.

Una figura y la imagen que de ella da un espejo, son figuras simétricas respecto del plano del espejo.

Se llaman *elementos homólogos* en dos figuras simétricas, los elementos (puntos, rectas, caras, ángulos, etc.) que se corresponden.

Denominamos *elementos dobles* en dos figuras simétricas, a los elementos (puntos, rectas, planos) que son simétricos de sí mismos.

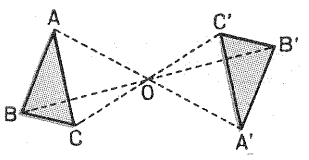


FIG. 70

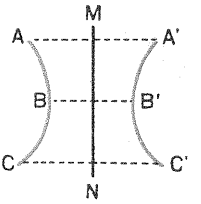


FIG. 71

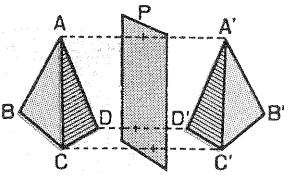


FIG. 72

98. Propiedades de las figuras simétricas respecto a un centro.

1.ª Las figuras simétricas respecto a un centro tienen las propiedades de las figuras homotéticas, es decir: *a)* las rectas homólogas son paralelas; *b)* los segmentos homólogos son iguales, y *c)* los ángulos homólogos son iguales.

2.ª Las figuras planas simétricas respecto a un centro son superponibles por un giro de 180° alrededor del centro de simetría.

3.ª En figuras simétricas respecto a un centro, el único *punto doble* es el centro de simetría; *rectas dobles* son todas las que pasan por el centro, y *planos dobles*, los que pasan por el mismo centro.

99. Propiedades de las figuras simétricas respecto a un eje.

1.ª Se conserva en ellas la igualdad de ángulos y segmentos homólogos.

2.ª Son siempre superponibles mediante un giro de 180° alrededor del eje de simetría.

3.ª En figuras simétricas respecto a un eje son *puntos dobles* todos los del eje; *rectas dobles*, el eje y todas las perpendiculares al eje que se cortan con él; *planos dobles*, todos los que pasan por el mismo eje y todos los perpendiculares a él.

100. Propiedades de las figuras simétricas respecto a un plano.

1.ª Dos figuras simétricas respecto a un plano tienen iguales todos los elementos homólogos: lados, caras, ángulos, etc.

2.ª A toda alineación de puntos en una de las figuras corresponde una alineación de sentido opuesto a la otra.

3.ª Los poliedros simétricos respecto a un plano no son, generalmente, superponibles.

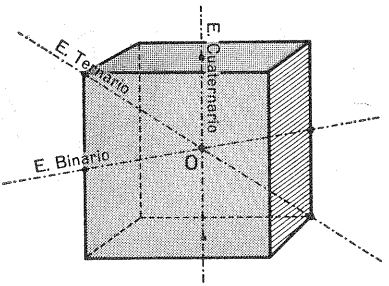


FIG. 73

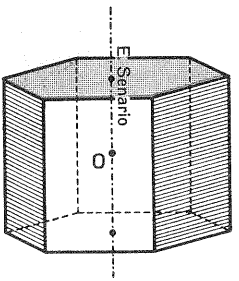


FIG. 74

4.ª En figuras simétricas respecto a un plano son *puntos dobles* todos los situados en el plano de simetría; *rectas dobles*, todas las situadas en el plano y todas las perpendiculares a él, y *planos dobles*, el plano de simetría y los perpendiculares a él.

101. Figuras con centro, eje o plano de simetría. — Si una figura es simétrica de sí misma respecto de un punto, se dice que *tiene este centro de simetría.*

Los segmentos rectilíneos que pasan por el centro de simetría y están limitados por dos puntos homólogos quedan divididos por dicho centro en dos partes iguales.

Análogamente, si una figura es simétrica de sí misma respecto de un eje o respecto de un plano, se dice simplemente que *tiene este eje* o *este plano de simetría.*

Los segmentos perpendiculares a un eje de simetría y limitados por dos puntos homólogos quedan divididos por dicho eje en dos partes iguales. Si tomamos como eje de rotación un eje de simetría y hacemos girar la figura alrededor de él una vuelta completa, ó 360°, dicha figura ocupa posiciones idénticas; según que el número de ellas sea 2, 3, 4 ó 6, los ejes se llamarían *binarios, ternarios, cuaternarios* y *senarios* (figuras 73 y 74).

Los segmentos perpendiculares a un plano de simetría y limitados por dos puntos homólogos quedan divididos por él en dos partes iguales. Todo plano de simetría divide a la figura en dos partes iguales, de tal manera que una de ellas es idéntica a la imagen producida por la otra al reflejarse en un espejo (fig. 75).

Ejemplos de figuras geométricas que tienen centro, ejes o planos de simetría:

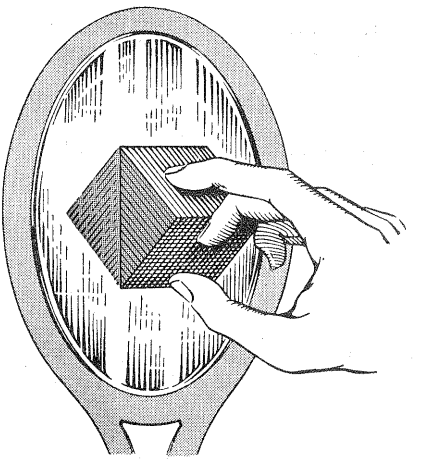


Fig. 75

Polígonos regulares

1.º *Los polígonos regulares de un número par de lados tienen por centro de simetría el centro del polígono* (fig. 76).

Los polígonos regulares de un número impar de lados no tienen centro de simetría (fig. 77).

2.º *Todas las bisectrices de los ángulos de un polígono regular cualquiera y todas las mediatrices de sus lados, son ejes de simetría del polígono.*

Círculo

1.º *El círculo tiene un centro de simetría, que es su propio centro.*

2.º *Todo diámetro de un círculo es un eje de simetría de la curva.* En efecto: Sea *AB* un diámetro y *M* uno cualquiera de sus puntos (fig. 78). Trazando el radio *OM*, la perpendicular *MN* al diámetro *AB* y el radio *ON*, se forman los triángulos rectángulos *OPM* y *OPN*, que son iguales por tener la hipotenusa igual y un cateto común. Luego, *MP* es igual a *PN* y los puntos *M* y *N* son simétricos.

Un círculo tiene, por consiguiente, tantos ejes de simetría como diámetros, es decir, infinitos.

Esfera

El centro, todo diámetro y todo plano diametral (plano que pasa por el centro) son, respectivamente, *centro, eje* y *plano de simetría de la esfera.* En la esfera hay, por consiguiente, *un centro, infinitos ejes* e *infinitos planos de simetría.*

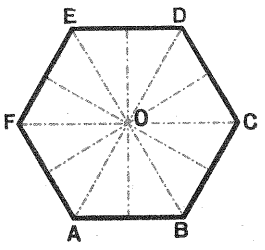


Fig. 76

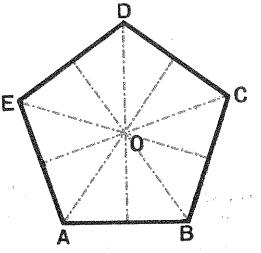


Fig. 77

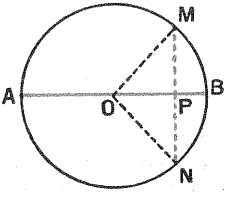


Fig. 78

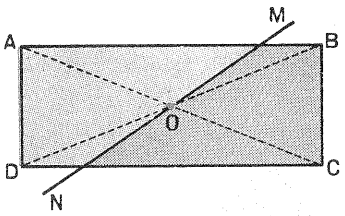


FIG. 79

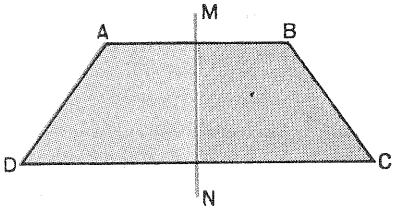


FIG 80

102. Simetría e igualdad. — Los conceptos de *simetría* e *igualdad* no son equivalentes. Dos figuras, o dos partes de una figura, son iguales cuando son superponibles. Esta propiedad es independiente de la *posición* que ambas figuras, o ambas partes, ocupen en el espacio.

Para que dos figuras sean simétricas, es necesario que ocupen en el espacio una posición tal que cada una de sus partes tenga su homóloga en la otra, respecto a un centro, eje o plano, como acabamos de indicar.

Dos figuras (o dos partes) *iguales pueden ser siempre simétricas*; pero *dos figuras* (partes) *simétricas no siempre son iguales.*

La recta *MN* divide a los cuadriláteros de las figuras 79 y 80 en dos partes iguales, que, además, son simétricas; las dos partes de la figura 79 con relación al *centro O*, y las de la figura 80 con relación a la *recta MN*.

En cambio, dos guantes, derecho e izquierdo, son simétricos con relación a un plano, pero no son iguales, puesto que no se pueden cambiar de mano. En este caso, cuando dos figuras son simétricas pero no iguales, suele decirse de ellas que son *inversamente iguales* (*).

(*) Figuras *directamente iguales* son las que pueden superponerse sin sacarlas del plano en que están dibujadas, es decir, con solo moverlas sobre él (por *traslación* o por *giro*).

Figuras *inversamente iguales* son las que sólo pueden hacerse coincidir sacando a una de ellas del plano del dibujo (o sea, por un *rebatimiento* o doblamiento del plano). Nuestras manos, por ejemplo, son figuras inversamente iguales.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

708. Dibujar un punto y una recta y hallar la figura simétrica del punto respecto de la recta, y la figura simétrica de la recta respecto del punto. Explicar el camino seguido.

709. Las coordenadas cartesianas de un punto *B* son números opuestos de las de otro *A*. ¿Qué posición ocupan estos puntos respecto del origen de coordenadas? Ayudarse del dibujo.

710. Dibujar un ángulo y trazar luego la figura simétrica respecto de uno de sus lados y respecto del vértice. Demostrar que las dos figuras resultantes son iguales.

711.—Dibujar un triángulo y hallar luego su simétrico: 1.º, respecto de un punto interior; 2.º, respecto de un punto del contorno que no sea un vértice; 3.º, respecto de un punto exterior; 4.º, respecto de una de las alturas; 5.º, respecto de una de las medianas. (Cada ejercicio se hará en figura separada y utilizando el mismo triángulo; el triángulo simétrico del dado se dibujará en trazo grueso o a color).

712. Dibujar una circunferencia y la figura simétrica de ella respecto de un punto de la misma. Explicar cómo se hace.

713. ¿Qué se entiende por figuras simétricas respecto de un punto, eje o plano? ¿Y por figuras con centro, eje o plano de simetría?

714. Dibujar un rectángulo, un cuadrado y un rombo. Trazar los ejes de simetría y explicar lo que se entiende por eje de simetría de una figura.

715. Dibujar una circunferencia y dos puntos *A* y *B* exteriores al círculo y equidistantes del centro. Considerando la figura formada por la circunferencia y los puntos, trazar la recta que es eje de simetría de esta figura. ¿Qué posición relativa han de ocupar los puntos para que la figura tenga, además, centro de simetría? ¿Cuál será este centro?

716. La figura formada por dos circunferencias secantes de igual radio, ¿tiene ejes y centro de simetría? En caso afirmativo, señálense en el dibujo.

717. Una figura está formada por dos circunferencias iguales y una recta. ¿Cómo han de estar colocadas para que la figura tenga centro de simetría? ¿Y para que tenga un eje de simetría? Ayudarse en cada caso del dibujo.

18. Angulos poliedros

103. Ángulo triedro: definiciones. — *Se llama ángulo triedro la región del espacio limitada por la figura formada por tres semirrectas no coplanarias que parten de un mismo punto, y por los tres ángulos planos que determinan esas tres rectas.*

El punto común V (fig. 81) se llama *vértice*. Las semirrectas VA, VB, VC, se llaman *aristas;* son ilimitadas. Los ángulos planos AVB, BVC y CVA se denominan *caras* del triedro. Las caras del triedro forman, dos a dos, ángulos diedros, a los que llamamos *ángulos* del triedro.

Las caras y los ángulos de un triedro se suelen expresar en *grados*, *minutos* y *segundos* del sistema sexagesimal.

Un ángulo triedro se designa por la letra de su vértice, o por ésta seguida de una de cada arista. Así, en la figura 81 diremos: el triedro V o el $V(ABC)$. Los ángulos del triedro suelen designarse por la letra mayúscula de su arista, y las caras opuestas por la minúscula correspondiente.

Así, en la figura 81 es:

ángulo A = ángulo diedro $CVAB$; cara a = ángulo plano BVC
ángulo B = ángulo diedro $AVBC$; cara b = ángulo plano CVA
ángulo C = ángulo diedro $BVCA$; cara c = ángulo plano AVB

Resulta muy sencillo construir un triedro. En una hoja de papel o cartulina (figura 82) se suprime un ángulo (cortándolo) y luego se dobla lo que resta a lo

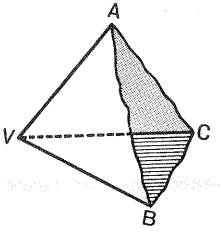


FIG. 81

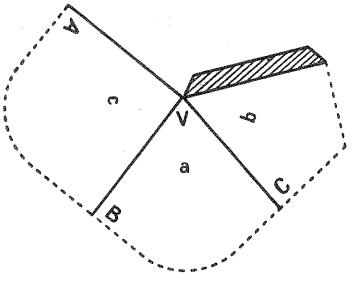


FIG. 82

largo de dos rayos rectilíneos, VB y VC, que salgan del vértice V. Bastará después pegar los dos bordes libres del corte para obtener el triedro.

La operación inversa, es decir, cortar por una arista un triedro de papel o cartulina y extenderlo luego sobre un plano, se denomina *desarrollar* el triedro.

104. Triedros suplementarios. — *Se dice que dos triedros son suplementarios cuando los diedros de cada uno son suplementos de las caras del otro.*

Para probar la existencia de triedros suplementarios, demostraremos el siguiente

TEOREMA. — *Si por un punto interior a un triedro trazamos perpendiculares a sus caras, se forma otro triedro suplementario del primero.*

Sea el triedro $V(ABC)$, figura 83. Desde un punto interior V' trazamos las semirrectas $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$, perpendiculares, respectivamente, a los planos BVC, AVC, AVB. Vamos a demostrar que el triedro formado, $V'(A'B'C')$, es suplementario del $V(ABC)$.

Como $V'A'$ y $V'B'$ son perpendiculares a las caras del diedro C, en virtud de un teorema ya demostrado (87), se verificará:

cara c' es suplementaria del diedro C

De igual modo veríamos que

cara b' es suplementaria del diedro B

cara a' es suplementaria del diedro A

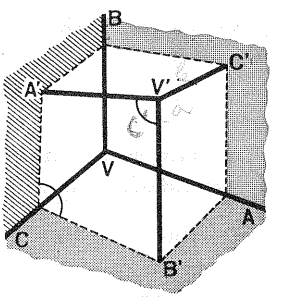


FIG. 83

Por otra parte, el plano $A'V'B'$ es perpendicular al BVC y al AVC, pues pasa por las rectas $V'A'$ y $V'B'$ (86, 1.°); luego, la arista VC es perpendicular al plano $A'V'B'$ (86, 2.°).

De análoga manera se demuestra que las aristas VB y VA son perpendiculares a los planos $A'V'C'$ y $B'V'C'$. Por tanto, en virtud del teorema antes aplicado (87), tendremos:

cara c es suplementaria del diedro C'
cara b es suplementaria del diedro B'
cara a es suplementaria del diedro A'

Luego, los triedros V y V' reunen las dos condiciones requeridas para ser suplementarios.

105. Propiedades de las caras y de los ángulos de un triedro. — 1.ª *En todo triedro, una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.*

Sea el triedro V (fig. 84). Basta demostrar que si b es la cara mayor, se verifica la desigualdad $b < a + c$, pues entonces será $a > b - c$ y $c > b - a$.

Formemos en b el ángulo $c' = c$. Tomemos arbitrariamente las distancias $VB = VD$ y cortemos al triedro por cualquier plano que pase por BD; hemos obtenido así la sección ABC. Tenemos ahora:

$$\triangle AVB = \triangle AVD \quad \text{de donde} \quad AD = AB$$

En el triángulo ABC es $AC < AB + BC$

Restando miembro a miembro la igualdad de la desigualdad, queda

$$AC - AD < BC \quad \text{o bien} \quad DC < BC$$

y en los triángulos BVC y CVD, que tienen VC común y $DC < BC$, será

$$\text{áng. } d < \text{áng. } a$$

Finalmente, sumando el ángulo $c' = c$ a los dos miembros de esta desigualdad, resulta

$$\text{áng. } d + \text{áng. } c' < \text{áng. } a + \text{áng } c, \quad \text{o sea,} \quad b < a + c$$

como se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. — Obsérvese la analogía que hay entre estas propiedades y las referentes a los triángulos, las cuales hemos empleado en la demostración.

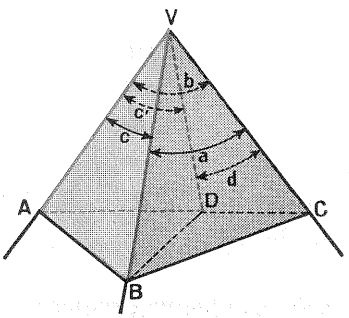


FIG. 84

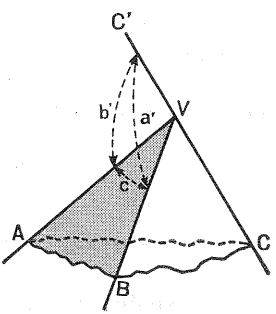


FIG. 85

2.ª *La suma de las caras de un triedro es inferior a cuatro rectos.*

En el triedro $V(ABC)$, figura 85, prolonguemos la arista VC y tendremos el triedro $V(ABC')$. Podemos escribir:

$$\begin{array}{r} a + a' = 2 \text{ rectos} \\ b + b' = 2 \text{ rectos} \\ \hline a + b + a' + b' = 4 \text{ rectos} \end{array}$$

pero $c < a' + b'$; luego, $a + b + c < 4$ rectos, como se quería demostrar.

3.ª *La suma de los ángulos diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.*

Consideremos un triedro $V(ABC)$. En el triedro suplementario de éste, $V'(A'B'C')$, se ha de verificar, en virtud de la propiedad anterior, que

$$0 < a' + b' + c' < 360°$$

y poniendo en lugar de estas caras sus valores en función de los diedros del triedro propuesto, tendremos:

$$0 < (180° - A) + (180° - B) + (180° - C) < 360°$$

o bien, reduciendo,

$$0 < 540° - (A + B + C) < 360°$$

es decir,

$$540° > A + B + C > 180°$$

106. Igualdad de triedros. — Dos triedros son *congruentes* o *iguales* cuando tienen las caras y los ángulos respectivamente iguales e igualmente dispuestos, es decir, cuando son *superponibles*. En este caso se llaman también *directamente iguales*.

Es necesario advertir que aunque dos triedros tengan iguales sus elementos homólogos, a veces no es posible superponerlos, por no tener dispuestos dichos elementos de la misma manera. Esto es lo que sucede con los triedros *simétricos*, (*)

(*) Si en un triedro se prolongan las tres aristas por el lado del vértice se forma otro triedro, llamado *simétrico* del primero, que tiene todos sus elementos, caras y diedros iguales a los de éste, pero colocados de distinta manera (fig. 86). Al conjunto de los dos triedros se les llama *triedros opuestos por el vértice;* en ellos, las caras del uno son prolongación de las caras del otro.

Dos triedros simétricos sólo pueden coincidir cuando tienen dos diedros iguales, y entonces lo son también las caras opuestas, es decir, que los triedros son isoedros (con dos diedros iguales).

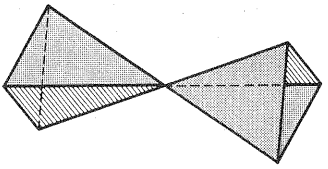


FIG. 86

llamados también *inversamente iguales*. Como ejemplo de ello, pueden servir un triedro y la imagen que produce en un espejo (fig. 72); o también, dos triedros opuestos por el vértice (fig. 86).

Dados dos triedros, V y V', cuyos ángulos y caras son, respectivamente, A, B, C, a, b, c y A', B', C', a', b', c', la definición de igualdad de triedros dada más arriba exige que se cumplan las seis igualdades:

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad A = A', \quad B = B', \quad C = C'$$

No obstante, vamos a ver que si se cumplen *tres* de ellas, convenientemente elegidas, las otras tres se cumplen también.

PRIMER CASO: *Dos triedros son iguales cuando tienen iguales e igualmente dispuestos un diedro y las caras que lo forman.*

Sean los triedros V y V' (fig. 87).

Hipót.: $A=A'$, $b=b'$, $c=c'$

Tesis: triedro V = triedro V'

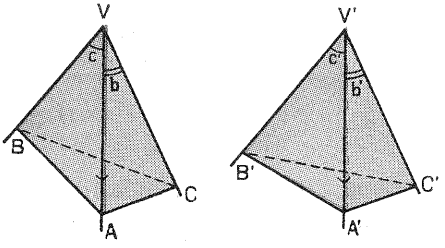


FIG. 87

Hagamos coincidir el diedro A con el A', de modo que V caiga sobre V'. Entonces, la cara b coincide con su igual b' y la c con la c'.

Por tanto, los triedros habrán coincidido, indicando que son iguales.

SEGUNDO CASO: *Dos triedros son iguales si tienen igual una cara y los diedros adyacentes, y están dispuestos del mismo modo.*

Sean los triedros V y V' (fig. 88).

Hipót.: $a = a'$, $B = B'$, $C = C'$.

Tesis: tr. V = tr. V'.

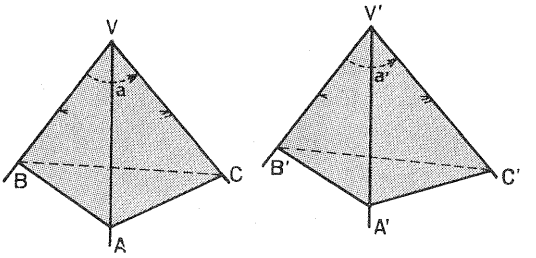


FIG. 88

Llevemos el triedro V sobre el V', de modo que la cara a caiga sobre su igual a'. Ambos triedros coincidirán, por tomar las caras b y b' la misma dirección (exigida por la igualdad de los diedros C y C'), así como las caras c y c' (por ser iguales B y B').

TERCER CASO: *Dos triedros son iguales si las tres caras son respectivamente iguales y están dispuestas del mismo modo.*

Sean los triedros V y V' (fig. 89).

Hipót.: $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Tesis: tr. V = tr. V'.

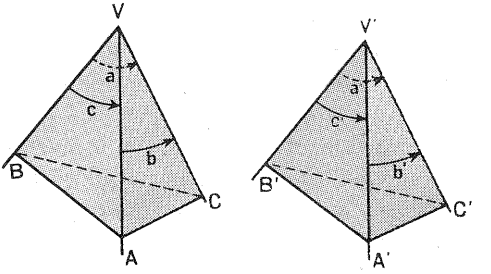


FIG. 89

En efecto: la tesis es casi evidente, puesto que si las caras son iguales, los desarrollos planos de ambos triedros, V y V', serán iguales. Y si se superponen los desarrollos y se reconstruyen luego los triedros, también quedarán éstos superpuestos.

CUARTO CASO: *Dos triedros son iguales si los tres diedros son respectivamente iguales y están dispuestos del mismo modo.*

Sean los triedros V y V' (fig. 90).

Hipot.: $A = A'$, $B = B'$. $C = C'$.

Tesis: tr. V = tr. V'.

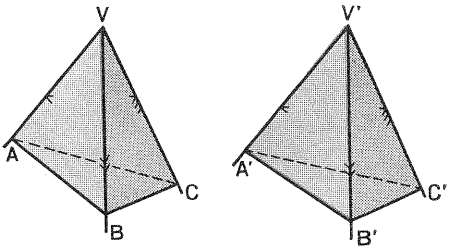


FIG. 90

En efecto: basta ver que si $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, los triedros suplementarios serán iguales por tener las caras respectivamente iguales e igualmente dispuestas, y, por lo tanto, sus diedros serán también iguales e igualmente dispuestos. De esta consecuencia deducimos que los triedros dados tienen sus caras respectivamente iguales e igualmente dispuestas, y, por el tercer caso, son iguales c. q. d.

107. Ángulos poliedros. — *Si trazamos varias semirrectas que partan de un punto, no estando tres en un mismo plano, la parte de espacio limitada por los planos que determinan cada dos semirrectas consecutivas se llama ángulo poliedro.*

O más brevemente: *Ángulo poliedro es la porción de espacio limitada por ángulos, situados en planos distintos y que tienen el vértice común.*

Vértice es el punto de donde parten las semirrectas. *Aristas* son las semirrectas que concurren en el vértice; son ilimitadas. *Caras* son los ángulos planos que determinan cada dos semirrectas consecutivas. *Ángulos* del poliedro son los diedros que forman cada dos planos que concurren en una arista. Los ángulos poliédricos se llaman *triedros, tetraédricos, pentaédricos*, etc., según que el número de sus diedros o caras sean tres, cuatro, cinco, etc. En la figura 91 está representado un ángulo pentaédrico.

Un ángulo poliedro se llama *convexo* o *cóncavo*, según que cortado por un plano produzca en éste un polígono convexo (figura 91) o cóncavo (fig. 93).

Para *montar* en cartulina un ángulo poliedro convexo, elegiremos en una hoja un punto cualquiera V (fig. 92), y después de suprimir (cortándolo) un ángulo plano, trazaremos a partir de V tantos rayos rectilíneos como caras deseamos que

tenga el ángulo poliedro, menos uno. En la figura hemos trazado tres: *VB, VC* y *VD*. Bastará luego doblar la cartulina a lo largo de esos rayos y pegar los bordes libres del corte, para obtener el ángulo poliedro; en nuestro caso, resultará un ángulo tetraédrico.

Inversamente: si tenemos un ángulo poliedro construido con papel o cartulina, la operación de cortar por una arista y extender luego la superficie hasta que venga a quedar sobre un plano, se denomina *hallar el desarrollo* del ángulo poliedro.

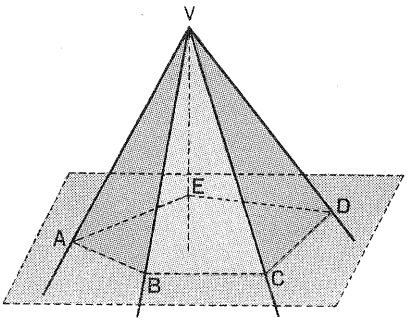


FIG. 91

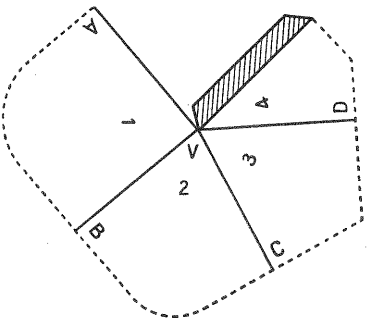


FIG. 92

108. Propiedades de las caras. — 1.ª *La suma de las caras de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos.*

El desarrollo del ángulo poliedro nos muestra claramente esta propiedad. En efecto: al abrir o desarrollar el ángulo poliedro sobre un plano, quedará una porción del plano sin cubrir por ninguna de las caras; luego, entre todas ellas no llegan a valer cuatro rectos ó 360°, que es la suma de los ángulos que se pueden formar alrededor de un punto (figura 92).

Si la suma fuese igual a cuatro rectos, se trataría de un ángulo poliedro completamente aplastado, es decir, de un plano. O bien, sería un ángulo poliedro cóncavo, con alguno de sus diedros entrante (fig. 93).

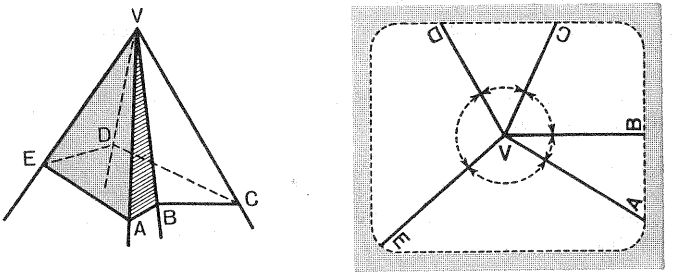


FIG. 93

También se tratará de un ángulo poliedro cóncavo si la suma de sus caras es mayor que 360°.

2.ª *En un ángulo poliedro, una cara cualquiera es menor que la suma de todas las demás.*

En efecto: si suponemos el desarrollo de un ángulo poliedro en el que, por no cumplirse esta propiedad, una cara fuese mayor de la suma de las demás, resultaría imposible unir los dos bordes libres sin deformar la cara en cuestión. Luego, no puede existir un ángulo poliedro así.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

718. Dibujar un ángulo triedro, definir ángulo triedro y enunciar y escribir la relación que existe entre sus caras.

719. Dibujar un triedro trirrectángulo, definir triedro trirrectángulo y señalar algún ejemplo que pueda observarse en la habitación en que se está.

720. Los elementos de un triedro son:

$a = 15° 38'$, $b = 16° 6'$, $c = 20° 16'$, $A = 50° 3'$, $B = 52° 6'$, $C = 80° 2'$

Determinar los elementos del triedro suplementario.

721. ¿Puede ser que una cara de un triedro valga $n°$, otra $2n°$ y la tercera $3n°$? ¿Por qué?

722. ¿Se puede construir un triedro con caras que midan 80°, 35° y 40° cada una? ¿Y si miden 140°, 160° y 80°? Justificar la respuesta.

723. ¿Pueden formar triedro un ángulo de un triángulo equilátero, uno de un cuadrado y uno de un pentágono regular? Justificar la respuesta.

724. Averiguar si pueden formar triedro tres ángulos iguales al ángulo del octágono regular.

725. Averiguar si pueden formar triedro tres ángulos planos a, b, c, ligados por las siguientes relaciones:

$a + b = 302° 9' 31''$; $a + c = 211° 7'$; $b + c = 206° 43' 29''$

726. Dos caras de un triedro miden 79° y 123°. ¿Entre qué valores puede oscilar la tercera?

727. ¿Cuánto suman las caras de un triedro y los diedros de su triedro suplementario? ¿Y las caras y diedros de un triedro?

Construir en cartulina los triedros cuyas caras valen:

728. $a = 45°$, $b = 90°$, $c = 60°$.

729. $a = 100°$, $b = c = 60°$.

730. $a = 120°$, $b = 40°$, $c = 30°$.

731. Dibujar y definir dos triedros opuestos por el vértice.

732. Dibujar el desarrollo y construir luego en cartulina dos triedros opuestos por el vértice que no sean isósceles. Comprobar que no son superponibles.

733. Dibujar el desarrollo y construir luego en cartulina dos triedros opuestos por el vértice que sean isósceles. Comprobar que son superponibles.

734. ¿Podrá existir un ángulo hexaedro regular cuyas caras midan cada una 50°? Razonar la contestación.

735. Averiguar si es posible formar un ángulo poliedro convexo con las siguientes caras: una es un ángulo de un triángulo equilátero, dos son ángulos de un cuadrado, y la cuarta es un ángulo de un hexágono regular.

19. Poliedros regulares

109. Poliedros en general. — *Poliedro es un cuerpo geométrico totalmente limitado por polígonos planos.*

En un poliedro podemos considerar los siguientes elementos:

Caras, o polígonos planos que lo limitan;

Aristas, o lados de esos polígonos;

Vértices, o puntos en que concurren tres o más aristas;

Ángulos diedros, que son los formados por dos caras con una arista común;

Ángulos poliedros, formados por tres o más caras que tienen un vértice común;

Diagonales, o segmentos determinados por dos vértices no pertenecientes a la misma cara;

Planos diagonales, determinados por tres vértices no situados en la misma cara.

Superficie poliédrica es el conjunto de todas las caras del poliedro; su medida recibe el nombre de *área*.

Desarrollo de un poliedro es la figura obtenida al extender sobre un plano las caras del poliedro.

CLASES DE POLIEDROS. — Se dice que un poliedro es *convexo* cuando la prolongación de cualquiera de sus caras deja a todo el poliedro a un mismo lado de ella; en caso contrario, se llama *cóncavo*.

Los poliedros más importantes son los *regulares*, los *prismas* y las *pirámides*.

Algunos poliedros reciben nombres especiales según el número de caras; así, se llama *tetraedro* al poliedro de cuatro caras, *pentaedro* al de cinco, *hexaedro*, al de seis, *heptaedro* al de siete, *octaedro* al de ocho, *eneaedro* al de nueve, *decaedro* al de diez, *endecaedro* al de once, *dodecaedro* al de doce, *pentadecaedro* al de quince e icosaedro al de veinte.

TEOREMA DE EULER (*). — *En todo poliedro convexo, el número de caras* (C) *más el número de vértices* (V), *es igual al número de aristas* (A) *más* 2.

En fórmula:

$$C + V = A + 2$$

Este teorema clásico de la Geometría del espacio, carece de aplicación práctica en las Matemáticas que se estudian en el bachillerato. Por eso, omitimos la demostración.

110. Poliedros regulares. — *Se dice que un poliedro es regular cuando tiene iguales los ángulos diedros y los ángulos poliedros, y sus caras son polígonos regulares iguales.*

Sólo pueden existir cinco poliedros regulares convexos.

Para demostrarlo, veamos cuántos ángulos poliedros distintos se pueden formar con caras que sean ángulos de polígonos regulares, teniendo en cuenta que entre todas las que forme el ángulo poliedro han de sumar menos de cuatro rectos, o sea menos de 360°.

ÁNGULO POLIEDRO			POLIEDRO QUE RESULTA
Polígonos de las caras	Caras en cada vértice	Suma de las caras del ángulo poliedro	
tr. equiláteros	3	$3 \times 60° = 180°$	tetraedro (fig. 94)
» »	4	$4 \times 60° = 240°$	octaedro (fig. 96)
» »	5	$5 \times 60° = 300°$	icosaedro (fig. 98)
» »	6	$6 \times 60° = 360°$	*(imposible)*
cuadrados	3	$3 \times 90° = 270°$	hexaedro o cubo (fig. 95)
»	4	$4 \times 90° = 360°$	*(imposible)*
pentágonos	3	$3 \times 108° = 324°$	dodecaedro (fig. 97)
»	4	$4 \times 108° = 432°$	*(imposible)*
hexágonos	3	$3 \times 120° = 360°$	*(imposible)*

(*) *Leonardo* EULER (1707-1783), matemático alemán, de origen suizo.

Sólo hay, pues, los cinco poliedros regulares siguientes:

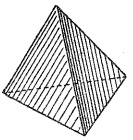


FIG. 94

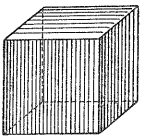


FIG. 95

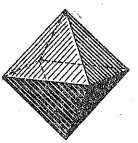


FIG. 96

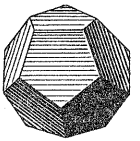


FIG. 97

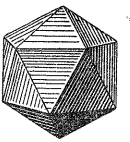


FIG. 98

1.° *Tetraedro regular*, cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros iguales, concurriendo tres en cada vértice (fig. 94).

2.° *Hexaedro regular* o *cubo*, cuya superficie está compuesta por seis cuadrados iguales, concurriendo tres en cada vértice (fig. 95).

3.° *Octaedro regular*, cuya superficie consta de ocho triángulos equiláteros iguales, concurriendo cuatro en cada vértice (fig. 96).

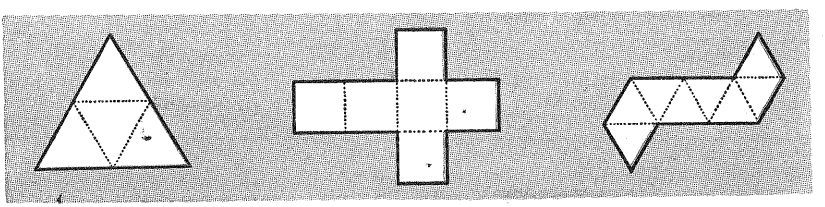
4.° *Dodecaedro regular*, cuya superficie está constituida por doce pentágonos regulares iguales, concurriendo tres en cada vértice (fig. 97).

5.° *Icosaedro regular*, cuya superficie está formada por veinte triángulos equiláteros iguales, concurriendo cinco en cada vértice (fig. 98).

111. Desarrollo y construcción de los poliedros regulares. — El desarrollo de los cinco poliedros regulares está representado en la figura 99. Para desarrollar cualquiera de los poliedros regulares, bastará reproducir a escala conveniente el dibujo de esta figura que le corresponde.

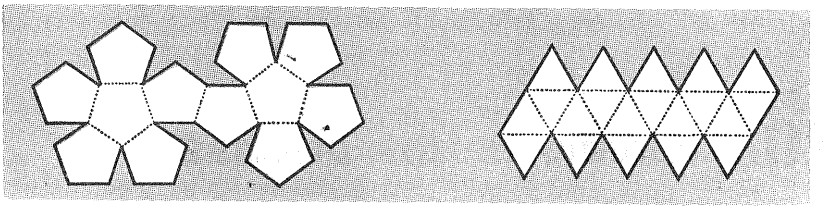
Viceversa, si tenemos los desarrollos, para construir los poliedros regulares correspondientes, se recortan los dibujos según las líneas de trazo continuo, se doblan por las líneas punteadas y se pegan los bordes.

112. Cálculo del área de los poliedros regulares. — En un poliedro regular, el área de la superficie es igual a la de una de sus caras multiplicada por el número de ellas. Por lo tanto:



TETRAEDRO HEXAEDRO OCTAEDRO

FIG. 99. — Desarrollo de los poliedros regulares



DODECAEDRO ICOSAEDRO

Para hallar el área de los poliedros regulares, aplicaremos las fórmulas que nos dan el área del triángulo equilátero, del cuadrado o del pentágono regular.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

736. ¿Se pueden formar poliedros regulares con ángulos poliedros de 6 caras?

737. ¿Qué son las caras de un dodecaedro regular? ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene?

738. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un octaedro regular? Dibujarlo.

739. Dibujar el desarrollo de un tetraedro regular cuya arista mide 22 mm. Construir luego el poliedro y hallar su área.

740. Dibujar el desarrollo de un hexaedro regular cuya arista mide 18 mm. Construir luego el poliedro y hallar su área.

741. Dibujar el desarrollo de un octaedro regular cuya arista mide 19 mm. Construir luego el poliedro y hallar su área.

742. Dibujar el desarrollo de un dodecaedro regular cuya arista mide 18 mm. Construir luego el poliedro y hallar su área.

743. Dibujar el desarrollo de un icosaedro regular cuya arista mide 28 mm. Construir luego el poliedro y hallar su área.

744. ¿Cuál es la arista de un cubo cuya superficie mide 50'46 m^2?

745. Hallar la longitud total de las aristas de un dodecaedro regular, si una mide 8 m.

746. La diagonal de un octaedro regular mide 8 m. Calcular la arista.

747. Hallar el área de un octaedro regular cuya diagonal mide 1 cm.

748. La diagonal de la cara de un cubo mide $2\sqrt{3}$ dm. Calcular la longitud total de sus aristas.

749. Hallar el área de un octaedro regular de 12 cm. de arista.

750. Calcular la arista de un octaedro regular de 25 cm^2 de área.

751. Calcular el área de un cubo, sabiendo que la diagonal de una de sus caras mide $\sqrt{8}$ cm.

752. ¿Qué cantidad de papel hará falta para cubrir una caja de cartón en forma de cubo, si la arista de dicha caja mide 6 cm.?

753. Calcular el área de los poliedros regulares de caras triangulares de 1 dm. de arista.

20. Estudio de los prismas

113. Prismas: definiciones. — PRISMA *es un poliedro, dos de cuyas caras, llamadas bases, son polígonos iguales de lados paralelos, y las restantes, denominadas caras leterales, son paralelogramos* (figuras 100 y 101).

Aristas básicas son los lados de los polígonos de las bases.

Aristas laterales son los segmentos que unen los vértices homólogos de las bases. *Todas las aristas laterales son iguales*, ya que se trata de segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.

Las aristas laterales pueden ser perpendiculares a las bases, y entonces el prisma se dice que es *recto* (fig. 100); las caras laterales son en este caso rectángulos. Si las aristas laterales son oblicuas a los planos de las bases, decimos que el prisma es *oblicuo* (fig. 101).

Prisma regular es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares (fig. 100).

Altura de un prisma es la distancia entre las bases (*MN*, fig. 101). En los prismas rectos, la altura es igual a una arista lateral.

Un prisma recibe el nombre de *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágono, hexágono, etc.

Sección recta es el polígono que resulta al cortar a un prisma por un plano perpendicular a las aristas laterales (Ej.: *ABCDE*, fig. 101). En los prismas rectos, la sección recta es igual a las bases.

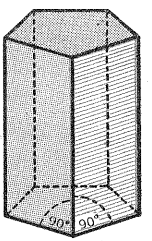


FIG. 100. PRISMA RECTO

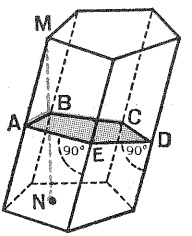


FIG. 101. PRISMA OBLICUO

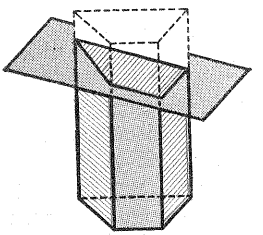


FIG. 102. TRONCO DE PRISMA

Tronco de prisma o *prisma truncado* es la porción de prisma comprendida entre una base y una sección no paralela a las bases, que corta a todas las aristas laterales (fig. 102).

114. Paralelepípedos: propiedades. — *Recibe el nombre de paralelepípedo todo prisma cuyas bases son paralelogramos* (figs. 103 y 104).

De esta definición se deduce que un paralelepípedo tiene seis caras, que son todas ellas paralelogramos.

TEOREMA. — En todo paralelepípedo:

1.° *Las caras opuestas son iguales y paralelas.*

2.° *Los triedros opuestos son simétricos.*

3.° *Las diagonales se cortan en un punto y en partes iguales.*

4.° *Toda recta que pase por ese punto y se limite en la superficie del poliedro queda dividida por él en dos partes iguales.* Dicho punto es, por consiguiente, *centro de simetría* del paralelepípedo.

En efecto (fig. 103):

1.° Las bases son iguales y paralelas, por definición de prisma. Considerando otras dos caras opuestas, tales como *ABCD* y *EFGH*, se veri-

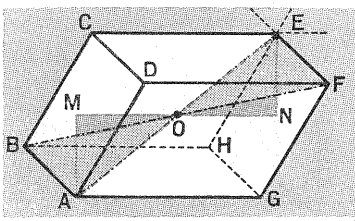


FIG. 103

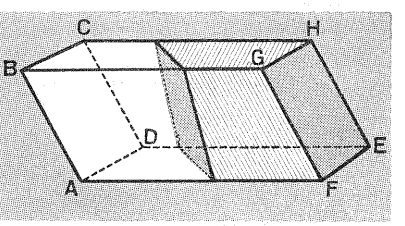


FIG. 104

fica que las aristas *AB* y *AD* son respectivamente iguales y paralelas a *GH* y *GF*; luego, los ángulos *DAB* y *FGH* son iguales y sus planos paralelos, resultando, en consecuencia, la igualdad y paralelismo de los paralelogramos *ABCD* y *EFGH*.

2.° Los triedros *A* y *E*, por ejemplo, son simétricos, pues prolongando las aristas del *E* se obtiene su simétrico (106), que es igual al *A* por tener elementos iguales y dispuestos del mismo modo.

3.° Considerando dos diagonales cualesquiera de las cuatro que tiene el paralelepípedo, por ejemplo las *AE* y *BF*, se ve que si se uniesen los

puntos A y F, B y E, resultaría un paralelogramo que tendría por diagonales las dos mencionadas, y por tanto éstas se cortan mutuamente en su punto medio. Como se demostraría lo mismo respecto a una de ellas y a otra cualquiera, resulta que todas pasan por el punto O.

4.° Sea, por ejemplo, la recta MN, que pasa por el punto O. El plano determinado por ella y una diagonal cualquiera, tal como AE, corta a dos caras opuestas del paralelepípedo según las rectas AM y EN, formándose dos triángulos OAM y OEN, que son iguales; luego, $OM=ON$.

CONSECUENCIAS. — 1.ª *Dos caras opuestas cualesquiera del paralelepípedo pueden ser consideradas como bases*, puesto que, como hemos demostrado, un paralelepípedo se compone de seis caras, que son paralelogramos de dos en dos iguales y paralelos.

2.ª *Todo plano que corte a cuatro aristas paralelas de un paralelepípedo, lo verifica según un paralelogramo* (fig. 104), ya que los lados opuestos de la figura que resulta son paralelos (79, 1.°).

115. El ortoedro. Cálculo de la diagonal. — *Ortoedro, o paralelepípedo rectángulo, es el paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos* (figura 105).

Por consiguiente, las seis caras del ortoedro son rectángulos. Llámanse dimensiones del ortoedro a las tres aristas concurrentes en un vértice.

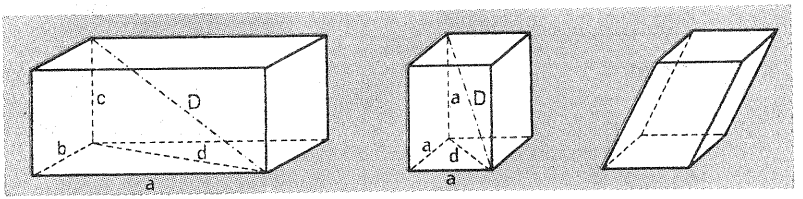


FIG. 105. ORTOEDRO FIG. 106 FIG. 107. ROMBOEDRO

El *ortoedro regular* o *cubo* es uno de los más importantes poliedros. Los seis rectángulos que forman sus caras son, además, cuadrados (figura 106).

Se prueba fácilmente que *las cuatro diagonales de todo ortoedro son iguales.*

Romboedro es el paralelepípedo cuyas seis caras son rombos (fig. 107).

TEOREMA. — *En todo ortoedro, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las aristas que concurren en un vértice.*

Este teorema es en el espacio el equivalente al teorema de Pitágoras de la Geometría plana.

En el triángulo rectángulo formado por D, d y c (fig. 111), se tiene:

$$D^2 = d^2 + c^2$$

pero d es hipotenusa del triángulo rectángulo formado por d, a y b, o sea que $d^2 = a^2 + b^2$; luego, sustituyendo, resulta:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{o sea} \quad \boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Caso particular: *En un cubo, el cuadrado de la diagonal es igual al triplo del cuadrado de la arista.*

Tendremos, en efecto (fig. 112):

$$D^2 = 3\,a^2 \quad \text{o sea} \quad \boxed{D = a\sqrt{3}}$$

116. Simetrías. — Damos a continuación los elementos de simetría del ortoedro, del cubo y del prisma hexagonal.

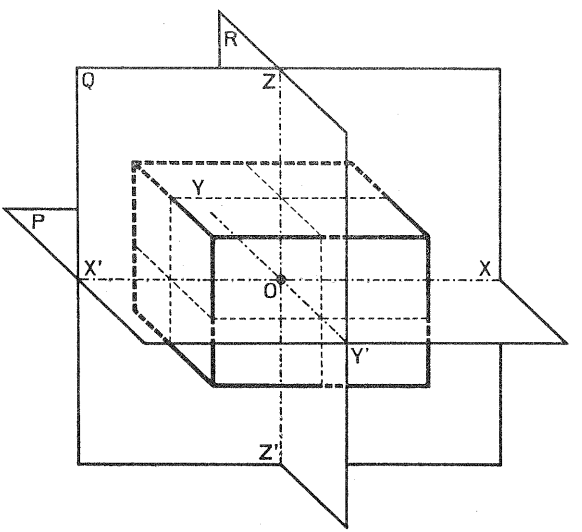


FIG. 108

I. Ortoedro (fig. 108). — 1.° El punto O de intersección de las diagonales es *centro de simetría.*

2.° Las perpendiculares XX', YY' y ZZ' a las caras, trazadas por el centro, son *ejes de simetría.*

3.° Los planos P, Q y R, determinados por cada dos ejes, *son planos de simetría.*

Total: centro, 3 ejes y 3 planos de simetría.

II. Cubo (figs. 109 a 113). — 1.° *Centro de simetría,* que es el punto O de intersección de las diagonales (fig. 110).

2.° Tiene 13 *ejes de simetría:* 3 *cuaternarios,* que unen los centros de caras opuestas (fig. 109); 4 *ternarios,* que van de un vértice al opuesto (fig. 110); 6 *binarios,* que unen los puntos medios de aristas opuestas (figura 111).

3.° Posee 9 *planos de simetría:* 3 que son perpendiculares a los ejes cuaternarios (fig. 112), y 6 que son perpendiculares a los ejes binarios (en la figura 113 están representados sólo dos). Todos los planos de simetría pasan por el centro O.

Total: centro, 13 ejes y 9 planos de simetría.

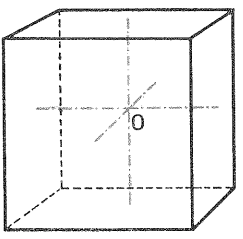


Fig. 109. Cubo
(3 ejes cuaternarios)

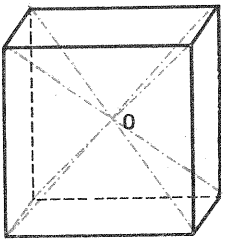


Fig. 110. Cubo
(4 ejes ternarios)

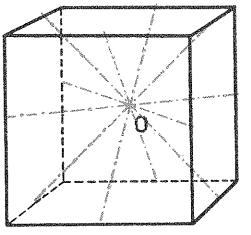


Fig. 111. Cubo
(6 ejes binarios)

III. Prisma hexagonal (fig. 114). — 1.° Tiene 7 *ejes de simetría:* uno *senario,* que une los centros de las bases; y 6 *binarios,* tres que unen los puntos medios de aristas laterales opuestas, y otros tres que unen los centros de caras laterales opuestas.

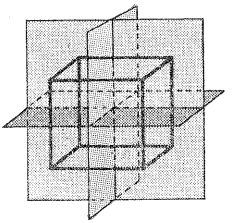


FIG. 112. CUBO
(3 planos perpendiculares)
a los ejes cuaternarios)

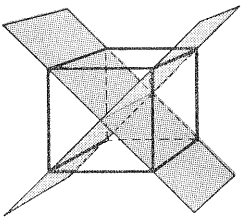


FIG. 113. CUBO
(2 de los 6 planos perpendiculares a los ejes binarios)

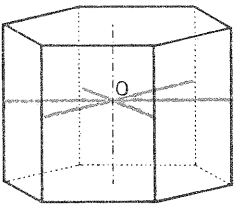


FIG. 114. PRISMA HEXAGONAL
(eje senario y 3 de
los 6 ejes binarios)

2.° *Centro de simetría*, que es el punto *O* de intersección de los ejes.

3.° Posee 7 *planos de simetría:* pasan por el centro de simetría y son perpendiculares a los ejes.

Total: centro, 7 ejes y 7 planos de simetría.

117. Desarrollo y áreas lateral y total de los prismas recto y oblicuo. — Supongamos un prisma cuya capa exterior esté formada por una lámina de papel, hojalata, etc. Cortando dicha lámina siguiendo la dirección de las aristas básicas, separaríamos los polígonos de las bases; y al cortar luego por una arista lateral y extender sobre un plano la capa que envuelve a las caras laterales, obtendríamos el llamado *desarrollo plano de la superficie lateral del prisma.*

Si el prisma es *recto* (fig. 115), el desarrollo de su superficie lateral es un *rectángulo* que tiene por altura la arista lateral o altura del prisma, y por base, el perímetro de la base del mismo prisma.

Si el prisma es *oblicuo* (fig. 116), el desarrollo está formado por una serie de *paralelogramos*, iguales a los de las caras laterales del prisma.

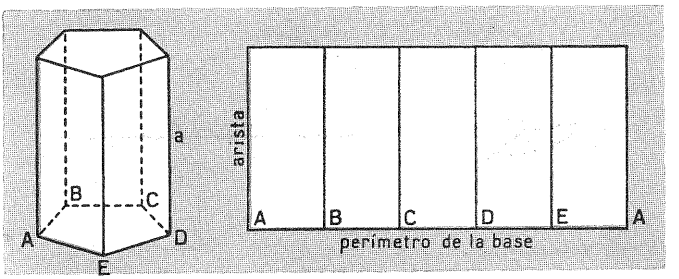


FIG. 115

De haber trazado previamente la sección normal al prisma, veríamos que dicha sección da lugar en el desarrollo a un segmento perpendicular a todas las aristas laterales, cuya longitud es igual al perímetro de la sección. Entendemos por *área lateral* de un prisma, el área de su desarrollo lateral, es decir, la suma de las áreas de las caras laterales. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de las bases.

ÁREA LATERAL. — 1.° *El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro del polígono de la base por la longitud de una arista lateral.*

En efecto: según hemos visto, el desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo que tiene por base el perímetro de la base del prisma, y por altura, la arista lateral o altura del prisma. Como el área del rectángulo es igual al producto de la longitud de la base por la de la altura, tendremos:

$$A_l = p \times a$$

fórmula en la que A_l representa el área lateral, p el perímetro de la base y a la arista lateral.

2.° *El área lateral de un prisma oblicuo es igual al perímetro de la sección recta por la longitud de una arista lateral.*

En efecto: el área lateral de un prisma oblicuo es la suma de las áreas de los paralelogramos de su desarrollo. En estos paralelogramos (figura 116), podemos considerar como base común a todos ellos a la arista lateral del prisma, y por altura a los distintos lados de la sección recta. Es decir, representando por a a la arista lateral del prisma y por p' el perímetro de la sección recta, tendremos:

$$A_l = a \cdot AB + a \cdot BC + a \cdot CD + a \cdot DA = a\,(AB+BC+CD+DA)$$

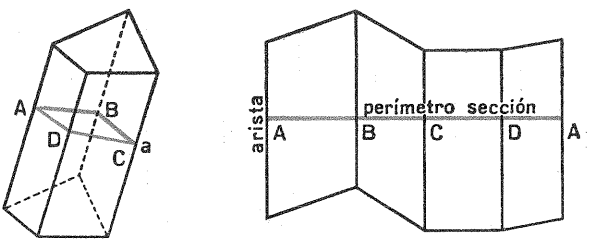


FIG. 116

y como la suma expresada entre paréntesis representa el perímetro p' de la sección recta, nos queda, en definitiva,

$$A_l = p' \times a$$

ÁREA TOTAL. — *Para hallar el área total de un prisma, se suma al área lateral el duplo del área de una de las bases.*

Es decir, representando por A_t el área total y por B el área de la base, se tiene:

$$A_t = A_l + 2B$$

EJERCICIOS

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. — *En las operaciones en que intervienen radicales, acostúmbrese el alumno a no extraer raíces. Es mucho más exacto operar con los radicales hasta llegar al resultado final. La solución puede darse en forma radical o bien en forma decimal, extrayendo la raíz o raíces con la aproximación conveniente.*

754. Hallar la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 1 dm., 2 dm. y 3 dm.

755. La diagonal de un cubo mide 25 centímetros. Calcular el área total.

756. Hallar la diagonal de un cubo y la de una cara, sabiendo que su área total es 9'6 metros cuadrados.

757. Las dimensiones de un ortoedro son tres números consecutivos que suman 24. Calcular el área del cuadrado que tiene por diagonal la de dicho ortoedro. Dar la respuesta en m^2.

758. Calcular las dimensiones de un ortoedro, sabiendo que sus aristas son proporcionales a los números 2, 3 y 7, y que su área total es 3'28 m^2.

759. Hallar las tres aristas de un ortoedro, sabiendo que son proporcionales a 3, 2 y $\sqrt{3}$, y que la diagonal vale 20 cm.

760. Hallar el área total de un ortoedro, sabiendo que sus dimensiones suman 30 cm. y son proporcionales a 2, 2 y 5.

761. La diagonal de un ortoedro mide 10 m., y dos aristas concurrentes, 4 m. y $\sqrt{20}$ m. ¿Cuánto mide la tercera?

762. Calcular las dimensiones de un ortoedro cuyas aristas son proporcionales a los números 2, 3 y 4, sabiendo que su diagonal mide $2\sqrt{29}$ dm.

763. En un ortoedro cuya área total es 292 dm^2, una cara tiene 56 dm^2 de área y la arista que le es perpendicular mide 6 dm. Calcular las longitudes de las otras dos aristas.

764. Hallar el área lateral de un paralelepípedo rectángulo de 6'25 m. de diagonal, siendo las dimensiones de la base 3 m. y 4 m.

765. En un paralelepípedo recto cuyas bases son dos rombos, el área total es 140 cm^2. La suma de las diagonales del rombo es 16 cm., y la razón de las áreas lateral y total es 4/7. Hallar las diagonales del rombo y las del paralelepípedo.

766. De un ortoedro se conocen el área lateral 112 m^2, el área total 142 m^2 y la longitud de una de las aristas básicas, 5 m. Calcular las otras dos aristas.

767. El área lateral de un prisma regular octogonal es 1 m^2. ¿Cuánto medirá su arista básica, si la longitud de la altura es 0'25 m.?

768. La sección recta de un prisma es un triángulo rectángulo isósceles cuya área es 18 cm^2, y su arista lateral mide 15 cm. Calcular el área lateral del prisma, expresándola en dm^2.

769. Calcular el área total de un prisma triangular recto de 5 m. de altura, y cuya base es un triángulo equilátero de 2 m. de lado.

770. Determinar el área total de un prisma hexagonal regular, en el cual es 12'56 cm^2 el área del círculo circunscrito a la base, y su altura es $\frac{2}{3}$ del perímetro de la base.

771. La altura de un prisma recto mide 6 m.; su base es un rectángulo, en el que uno de los lados es doble del contiguo; el área total es de 144 m^2. Calcular la longitud de una de las diagonales del prisma.

772. La diagonal de la cara de un prisma triangular regular mide 17 m. y la relación entre la arista lateral y la básica es $\frac{15}{8}$. Hallar el área lateral del prisma.

773. La sección recta de un prisma oblicuo es un cuadrado de 6 cm. de lado, la arista lateral del prisma mide 13 cm. y la altura 12 cm. Hallar el área total, sabiendo que dos de las caras laterales son rectángulos.

21. Estudio de las pirámides

118. Pirámides: definiciones. — *Llámase pirámide a un poliedro, una de cuyas caras es un polígono cualquiera denominado base, y las restantes, llamadas caras laterales, son triángulos con un vértice común, que es el vértice de la pirámide, debiendo estar éste situado fuera del plano de la base.*

En la pirámide *VABCD* (fig. 117), el cuadrilátero *ABCD* es la base; el punto *V*, el vértice; los triángulos *AVB*, *BVC*, *CVD* y *DVA* son las caras laterales; las rectas *VA*, *VB*, *VC* y *VD* que concurren en el vértice, se llaman *aristas laterales*, y las rectas *AB*, *BC*, *CD* y *DA* que forman el polígono de la base se denominan *aristas básicas*.

Altura de la pirámide es la perpendicular *VO* trazada desde el vértice a la base.

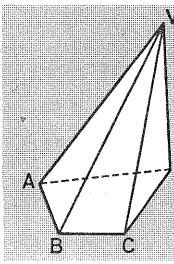


FIG. 117. PIRÁMIDE

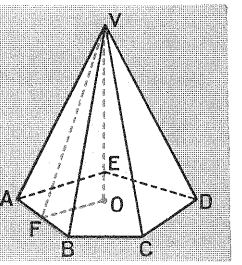


FIG. 118. PIRÁMIDE REGULAR

Una pirámide recibe el nombre de *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

La pirámide triangular se llama *tetraedro*. Todas sus caras son triángulos y cualquiera de ellas puede servir de base.

De una pirámide se dice que es regular cuando su base es un polígono regular, y su altura tiene por pie el centro del polígono de la base. Ejemplo, la *VABCDE* (fig. 118).

En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y, en consecuencia, las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Apotema de una pirámide regular es la altura VF de uno de los triángulos que forman las caras laterales. No hay que confundirla con la apotema OF de la base.

El tetraedro regular es una pirámide regular triangular; pero una pirámide regular triangular no siempre es un tetraedro regular.

119. Secciones paralelas de la pirámide. — TEOREMA 1.° *Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base* (fig. 119):

1.° *Las aristas y la altura quedan divididas en partes proporcionales.*

2.° *La sección producida es un polígono semejante a la base.*

3.° *Las áreas de la sección y la base son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.*

Hipót.: Sección $A'B'C'D'$ $\parallel$ a la base $ABCD$

Tesis: 1.° $\dfrac{VA}{VA'} = \dfrac{VB}{VB'} = \dfrac{VC}{VC'} = \dfrac{VD}{VD'} = \dfrac{VO}{VO'}$

2.° polígono $ABCD \backsim$ polígono $A'B'C'D'$

3.° $\dfrac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \dfrac{\overline{VO}^2}{VO'^2}$

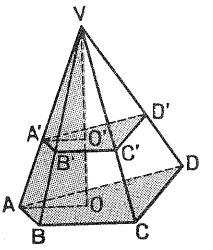


FIG. 119

1.° En el plano determinado por la altura VO y una arista lateral VA se forman los triángulos VAO y $VA'O'$, que son semejantes. Luego,

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VO}{VO'}$$

y como la arista lateral que hemos considerado es una cualquiera, tendremos:

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{VC}{VC'} = \frac{VD}{VD'} = \frac{VO}{VO'} \qquad [1]$$

2.° La sección $A'B'C'D'$ es un polígono de igual número de lados que la base $ABCD$. Los ángulos de estos dos polígonos son respectivamente iguales por tener sus lados paralelos, como intersección de planos paralelos con otros planos.

Por otra parte, los lados de esos polígonos son proporcionales. En efecto:

$$\triangle VA'B' \backsim \triangle VAB; \qquad \triangle VB'C' \backsim \triangle VBC; \qquad \triangle VC'D' \backsim \triangle VCD;$$
$$\triangle VD'A' \backsim \triangle VDA$$

por lo que se verifica:

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'}; \qquad \frac{VB}{VB'} = \frac{BC}{B'C'};$$

$$\frac{VC}{VC'} = \frac{CD}{C'D'}; \qquad \frac{VD}{VD'} = \frac{DA}{D'A'}$$

y teniendo en cuenta la igualdad de las primeras razones [1], resulta:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{VO}{VO'}$$

Luego, los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$, que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, son semejantes, y su razón de semejanza es la de las alturas VO y VO'.

3.° Recordando que la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, tendremos:

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } A'B'C'D'} = \frac{\overline{VO}^2}{\overline{VO'}^2}$$

TEOREMA 2.° — *Si dos pirámides tienen igual altura, las secciones hechas a igual distancia de los vértices, paralelamente a las bases, son proporcionales a dichas bases* (fig. 120).

Hipót.: dist. VB = dist. $V'B'$ = h
dist. VS = dist. $V'S'$ = h'
$B \parallel S$, $B' \parallel S'$

Tesis: $\frac{B}{S} = \frac{B'}{S'}$ o $\frac{S}{S'} = \frac{B}{B'}$

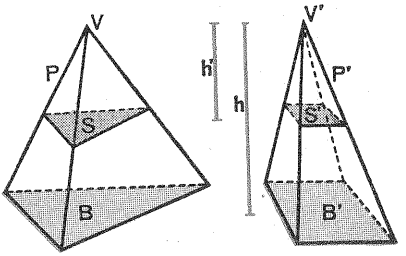


FIG. 120

Según el teorema anterior, se tiene:

$$\frac{B}{S} = \frac{h^2}{h'^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{B'}{S'} = \frac{h^2}{h'^2}$$

de donde se deduce

$$\frac{B}{S} = \frac{B'}{S'} \qquad \text{o también} \qquad \frac{S}{S'} = \frac{B}{B'}$$

CONSECUENCIA. — *Si dos pirámides tienen igual altura y sus bases son equivalentes, las secciones paralelas a las bases equidistantes de los vértices son también equivalentes.*

120. Tronco de pirámide de bases paralelas. — Si cortamos una pirámide $VABCD$ (fig. 121) por un plano paralelo a la base, se obtiene una nueva pirámide de $VA'B'C'D'$, llamada *pirámide parcial* o *pirámide deficiente*, y un cuerpo $ABCDA'B'C'D'$, denominado *pirámide truncada* o *tronco de pirámide de bases paralelas.*

Los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes (119, 1.°) y se denominan *bases* del tronco. La distancia h entre las bases es la *altura* del tronco, y los trapecios $ABB'A'$, $BCC'B'$, etc., son las *caras laterales.*

Un tronco de pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según provenga de una pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal, etcétera.

Tronco de pirámide regular es el que procede de una pirámide regular (fig. 121). Sus bases son dos polígonos regulares, y las caras laterales son trapecios isósceles e iguales. *Apotema* del tronco de pirámide regular es la altura a de los trapecios que forman las caras laterales.

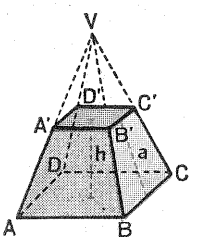


FIG. 121

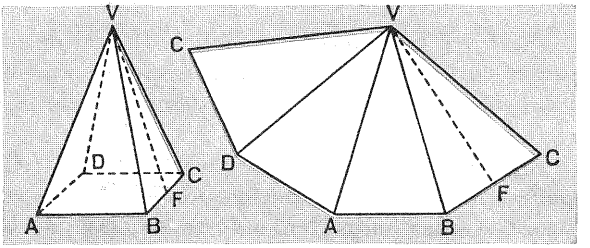


FIG. 122

121. Desarrollo y áreas lateral y total de una pirámide regular. — Supongamos (como en el caso del prisma) una pirámide cuya capa exterior esté formada por una lámina de papel, hojalata, etc., fácilmente separable del resto. Separando primeramente la base y cortando luego la lámina según la dirección de una arista lateral, obtendríamos, después de extenderla sobre un plano, el *desarrollo de la superficie lateral de la pirámide*.

Tratándose de una pirámide regular (fig. 122), el desarrollo se compone de tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene el polígono de la base, teniendo todos ellos por altura la apotema de la pirámide.

Se entiende por *área lateral* de la pirámide, el área del desarrollo de su superficie lateral, es decir, la suma de las caras laterales. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de la base.

ÁREA LATERAL. — *El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por la longitud de la apotema de la pirámide.*

En efecto: representando por l la medida del lado del polígono de la base, por n el número de lados de ese polígono, por p su perímetro, y por a la longitud de la apotema de la pirámide, tendremos:

$$A_l = \frac{l \times a}{2} \times n = \frac{ln \times a}{2} = \frac{p \times a}{2}$$

ÁREA TOTAL. — *El área total es igual a la suma del área lateral y el área de la base.*

Designando por B el área de la base, por a la apotema de la pirámide, por a' la apotema de la base, y por p el perímetro de ésta, tendremos:

$$A_t = A_l + B = \frac{p \times a}{2} + \frac{p \times a'}{2} = \frac{p\,(a+a')}{2}$$

122. Desarrollo y áreas lateral y total de un tronco de pirámide regular. — Si cortamos la superficie lateral de un tronco de pirámide según una arista lateral, podremos extender esta superficie sobre un plano, con lo que obtendríamos el *desarrollo de la superficie lateral del tronco de pirámide.*

Tratándose de un tronco de pirámide regular (fig. 123), el desarrollo se compone de tantos trapecios isósceles iguales como lados tienen los polígonos de las bases, teniendo todos ellos por altura la apotema del tronco.

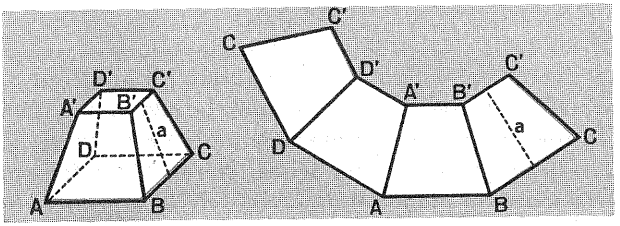


FIG. 123

Se entiende por *área lateral* del tronco de pirámide regular, el área del desarrollo de su superficie lateral, es decir, la suma de las áreas de las caras laterales. *Área total* es el área lateral aumentada en las áreas de las dos bases.

ÁREA LATERAL. — *El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al semiproducto de la suma de los perímetros de las bases por la apotema del tronco.*

En efecto: representando por l y l' las medidas de los lados de los polígonos de las bases, por n el número de lados de esos polígonos, por p y p' sus respectivos perímetros, y por a la longitud de la apotema del tronco, tendremos:

$$A_l = \frac{(l+l')a}{2} \times n = \frac{(nl+nl')a}{2} = \frac{(p+p')a}{2}$$

ÁREA TOTAL. — *Se obtiene sumando al área lateral las áreas de las bases.*

Designando por B y B' las áreas de las bases, tenemos:

$$A_t = A_l + B + B' = \frac{(p+p')a}{2} + B + B'$$

NOTA. — El polígono formado por las bases medias de los trapecios laterales se llama *base media* del tronco de pirámide. Representando por p_m el perímetro de ese polígono, el cual es igual a la semisuma de los perímetros de las bases del tronco, se tiene:

$$A_l = p_m a \quad \text{y} \quad A_t = p_m a + B + B'$$

CUESTIONES Y EJERCICIOS

774. Si en una pirámide regular, A es la arista lateral, R el radio de la base, a la apotema de la pirámide y a' la apotema de la base, demostrar que se verifica la igualdad $A^2 - R^2 = a^2 - a'^2$.

775. Hallar las aristas (lateral y básica) de una pirámide hexagonal regular, sabiendo que la suma de las doce aristas es 108 cm. y que la altura de la pirámide mide 12 cm.

776. En una pirámide regular, ¿cuál es la línea de máxima pendiente respecto de la base? Razonar la respuesta ayudándose del dibujo.

777. Una pirámide es cortada por un plano paralelo a la base a una distancia de ésta igual a los $\frac{3}{4}$ de la altura de la pirámide. ¿Qué relación hay entre las áreas de la sección y la de la base de la pirámide? ¿Por qué?

778. Una pirámide tiene por base un triángulo equilátero de 5 cm. de lado y la altura mide 10 cm. Se corta por un plano paralelo a la base distante de ésta 8 cm. Calcular el área de la sección producida por dicho plano.

779. Calcular las áreas lateral y total de una pirámide regular que tiene por base un hexágono de 2 cm. de lado, y cuya altura mide 4 cm.

780. Hallar el área total de una pirámide triangular regular cuyas aristas básicas miden 1'08 m., siendo la apotema de la pirámide igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a la base.

781. Hallar el área total de una pirámide triangular regular de arista básica 6 metros y arista lateral 12 metros.

782. El área lateral de una pirámide triangular regular es el doble del área de la base. Hallar la apotema de la pirámide, sabiendo que el lado de la base mide 4 cm.

783. Una pirámide de 66 cm. de altura tiene 36 cm^2 de base, y una sección paralela a ésta de 25 cm^2. Calcular la distancia entre la base y la sección.

784. Calcular el área lateral de una pirámide regular pentagonal de 6 m. de arista básica y 5 m. de arista lateral.

785. La base de una pirámide regular es un hexágono de 6 cm. de lado. Calcular la altura de la pirámide, sabiendo que su superficie lateral es doble de la de la base.

786. Una pirámide tiene por base un cuadrado de 1 dm. de lado y las caras laterales son triángulos equiláteros. Calcular el área total de la pirámide, expresando el resultado en cm^2.

787. El área lateral de una pirámide regular hexagonal es 195 dm^2. Hallar el área total de la pirámide, sabiendo que entre su apotema y el lado de la base suman 18 dm.

788. Un hotel, cuya planta es un cuadrado de 10 m. de lado, está cubierto por un tejado piramidal regular, de modo que sus caras forman un ángulo de 50° con el plano horizontal. ¿Cuánto vale la construcción de dicho tejado a 25 ptas. metro cuadrado? (Cos 50° = 0'64279).

789. Se corta un triedro, cada una de cuyas caras vale 90°, por un plano que corta a las 3 aristas en puntos situados a 3 cm. del vértice. ¿Cuál es el área total del cuerpo que resulta.

790. Hallar las áreas lateral y total de un tronco de pirámide regular que tiene por bases dos cuadrados de 4 cm. y 10 cm. de lado, siendo 5 cm. la longitud de la arista lateral.

791. Hallar el área total de un tronco de pirámide triangular regular cuya apotema mide 6'25 cm., siendo 5 cm. y 7'5 cm. los lados de las bases.

792. Calcular el área lateral y total de un tronco de pirámide regular que tiene por bases dos hexágonos de 3 y 2 cm. de lado, y la arista lateral mide 4 cm.

793. La superficie lateral de un tronco de pirámide cuadrangular regular mide 5'28 m^2. Sabiendo que la apotema del tronco mide 1 m. y el lado de la base menor 1'24 m., se desea hallar el lado de la base mayor y el área total.

22. Cilindros y conos de revolución

123. Cilindros y superficies cilíndricas: propiedades. — *Cilindro de revolución es el cuerpo engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados como eje. Está limitado por dos círculos iguales, llamados bases, y por una superficie curva, que recibe el nombre de superficie cilíndrica.*

Supongamos un rectángulo $AOO'B$ (fig. 124) que gira alrededor de uno de sus lados OO'. Este rectángulo engendra en su rotación (giro o revolución) un cuerpo al que llamamos *cilindro de revolución* o *cilindro recto de base circular*.

El lado AB, que engendra la superficie lateral del cilindro, recibe el nombre de *generatriz* o *lado* del cilindro. La recta fija OO' se denomina *eje*. Los lados OA y $O'B$ engendran dos círculos iguales y paralelos, que son las *bases* del cilindro.

Altura del cilindro es la distancia entre las dos bases. La altura es igual a la generatriz.

En un sentido más general, *se llama superficie cilíndrica a la superficie engendrada por una recta que resbala sobre una curva (plana o alabeada (*)), permaneciendo siempre paralela a sí misma.*

Así, la recta $A'A''$ (fig. 125) engendra una superficie cilíndrica al resbalar sobre la curva $ABCD$ paralelamente a su posición primitiva.

La recta, en cualquiera de sus posiciones $A'A''$, $B'B''$, etc., se llama *generatriz*, y la curva en la cual se apoya, *directriz*. La superficie será *cerrada* o *abierta*, según lo sea la directriz; cuando ésta tiene centro, la paralela a la generatriz trazada por dicho punto se llama *eje*.

PROPIEDADES. — *Las secciones producidas en una superficie cilíndrica por planos paralelos son iguales.*

En efecto: sean S y S' dos secciones producidas por los planos paralelos P y P' (fig. 126). Si trasladamos la primera S en la dirección de las generatrices, de modo que su plano P permanezca paralelo a la posi-

(*) Línea *alabeada* es la que no está contenida en un plano.

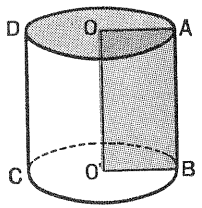


FIG 124

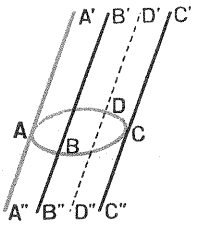


FIG. 125

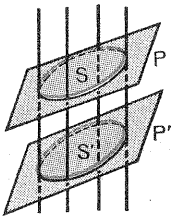


FIG. 126

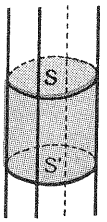


FIG. 127

ción primitiva, es claro que ha de llegar un momento en que dicho plano se confunda con el P', y todo punto de S coincidirá con el correspondiente de S' situado en la misma generatriz. Por consiguiente, ambas curvas coincidirán perfectamente, es decir, serán iguales.

El cuerpo geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos secciones planas paralelas se llama, en general, cilindro.

Las secciones planas son las *bases* del cilindro; éste puede ser *recto* u *oblicuo*, según que la generatriz sea perpendicular (fig. 127) u oblicua a las bases (fig. 126).

Las secciones rectas (perpendiculares a la generatriz) *en un cilindro de revolución son círculos iguales y paralelos a los círculos de las bases.*

124. Conos y superficies cónicas: propiedades. — *Cono de revolución es el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos como eje. Está limitado por un círculo, llamado base, y por una superficie curva, denominada superficie cónica.*

Supongamos un triángulo rectángulo ABC (fig. 128) que gira alrededor de uno de sus catetos AB. Este triángulo engendra en su rotación (giro o revolución) un cuerpo al que llamamos *cono de revolución* o *cono recto de base circular*.

La hipotenusa BC, que engendra la superficie lateral del cono, recibe el nombre de *generatriz* o *lado* del cono. El cateto fijo AB se denomina *eje*, y el móvil, AC, engendra un círculo llamado *base* del cono.

Vértice del cono es el vértice del triángulo generador. *Altura* del cono es la distancia del vértice a la base.

En un sentido más general, *se llama superficie cónica a la superficie engendrada por una semirrecta que parte de un punto fijo y se apoya sobre una curva dada (plana o alabeada).*

Así, la semirrecta VA (fig. 129), que parte del punto V y se apoya sobre la curva ABC, engendra al girar una superficie cónica.

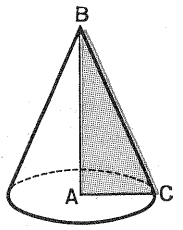


FIG. 128

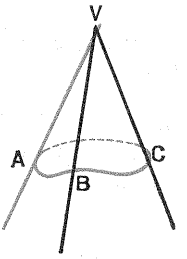


FIG. 129

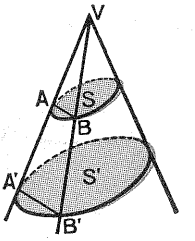


FIG. 130

La semirrecta, en cualquiera de sus posiciones, VA, VB, VC, etc., recibe el nombre de *generatriz*, y la curva en la cual se apoya, *directriz*. El punto V se llama *vértice* de la superficie. La superficie cónica será *cerrada* o *abierta*, según lo sea la directriz, y cuando ésta tiene centro, la recta determinada por dicho punto y el vértice recibe el nombre de *eje*.

PROPIEDADES. — *Las secciones planas producidas en una superficie cónica por planos paralelos son semejantes.*

En efecto: sean S y S' dos secciones producidas por dos planos paralelos (fig. 130). Dos generatrices cualesquiera VA' y VB' tendrán comunes con ellas los puntos A, A', B y B', tales que

$$\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'}$$

Ahora bien: esta relación permanece constante cuando una de las generatrices, VB por ejemplo, se desplaza al describir la superficie, si la otra VA se mantiene fija. De donde resulta, que los puntos móviles homólogos B y B' engendran dos figuras semejantes. En particular, si suponemos que B describe un círculo, B' describirá asimismo otro círculo. Se trata, pues, de un caso de homotecia en el espacio.

El cuerpo geométrico limitado por una superficie cónica y una sección plana que corte a todas las generatrices, se llama, en general, cono.

La sección plana es la base del cono; éste puede ser recto u oblicuo, según se proyecte o no el vértice en el centro de la base. Así, tanto el cono que tiene como base S como el que tiene S', son oblicuos (fig. 130).

Las secciones rectas (perpendiculares al eje) ***en un cono de revolución son círculos paralelos al círculo de la base.***

125. Tronco de cono de revolución. — *Es el cuerpo engendrado por un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a las bases.*

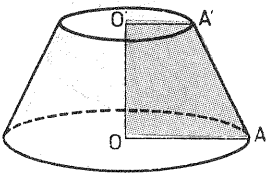


FIG. 131

El lado OO' (fig. 131) sobre el que gira el trapecio se llama *eje* del tronco. El tronco consta de dos círculos desiguales, engendrados por las bases del trapecio OA y $O'A'$, llamados *bases* del tronco, y de una superficie lateral engendrada por el lado opuesto al eje, llamado *generatriz* o *lado*. *Altura* del tronco es la distancia entre las dos bases.

El tronco de cono de revolución resulta también de cortar un cono de revolución por un plano paralelo a la base.

126. Cuerpos y superficies de revolución. — CUERPOS DE REVOLUCIÓN *son los engendrados por la rotación de una figura plana* 360° *alrededor de una recta situada en el mismo plano.* Esta recta se llama *eje.*

Los principales cuerpos geométricos de revolución son el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*. Los dos primeros ya los hemos definido (figs. 132 y 133). Esfera es el cuerpo engendrado por un semicírculo que gira alrededor del diámetro que lo limita (fig. 134).

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN *son las engendradas por la rotación de una línea alrededor de una recta fija llamada eje, a la que permanece invariablemente unida.*

Llamamos *generatriz* a cualquiera de las posiciones de la línea móvil.

Las principales superficies de revolución son la *cilíndrica*, la *cónica* y la *esférica*.

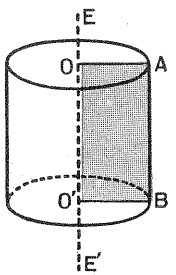


FIG. 132

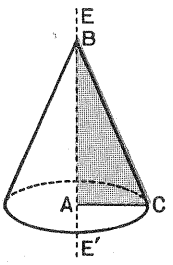


FIG. 133

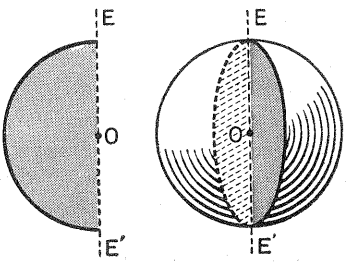


FIG. 134

Superficie cilíndrica de revolución es la engendrada por una recta en un movimiento de rotación alrededor de otra fija (eje), a la que es paralela.

La recta AA' (fig. 135), al girar alrededor del eje EE', engendra una superficie cilíndrica de revolución.

Superficie cónica de revolución es la engendrada por una recta en un movimiento de rotación alrededor de otra fija (eje), a la que corta oblicuamente.

La recta AA' (fig. 136), que corta oblicuamente al eje EE', engendra al girar alrededor de él una superficie cónica de revolución.

El ángulo constante que forma una generatriz con el eje se llama *abertura de la superficie cónica* o *ángulo cónico*. Todas las generatrices concurren en un punto V, que se denomina *vértice*. Este vértice divide a la superficie cónica en dos partes llamadas *hojas*.

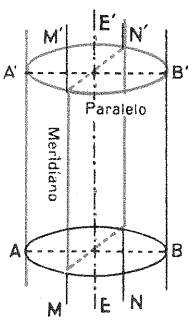


FIG. 135

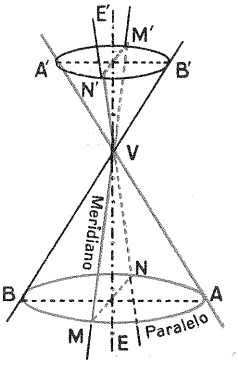


FIG. 136

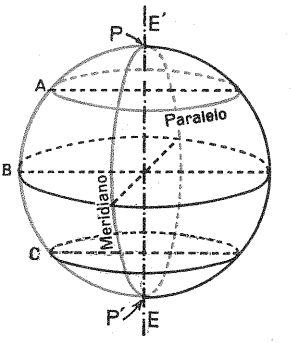


FIG. 137

Superficie esférica es la superficie de revolución engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor del diámetro que pasa por sus extremos.

Así, la semicircunferencia $PABCP'$ (fig. 137), al girar alrededor del EE', engendra una superficie esférica. Como en esta rotación, los puntos de la semicircunferencia siempre equidistan de su centro, resulta que todos los puntos de la superficie esférica equidistan de uno interior llamado *centro*. Esta propiedad es la que caracteriza a la superficie esférica.

En toda superficie de revolución, cada punto de la generatriz describe en la rotación una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje. Estas circunferencias se llaman *paralelos* de la superficie y

pueden considerarse como secciones producidas en la superficie por planos perpendiculares al eje de giro.

Reciben el nombre de *meridianos* o *secciones meridianas*, las secciones producidas en una superficie de revolución por planos que pasan por el eje. Como al girar un meridiano, pasa a coincidir con todos los demás, resulta que *todos los meridianos de una superficie de revolución son iguales.*

CUESTIONES Y EJERCICIOS

794. ¿Qué cuerpo engendra un círculo trasladándose paralelamente a sí mismo en dirección perpendicular a su plano? Dibujar la figura.

795. ¿Qué cuerpo engendra un trapecio rectángulo al girar alrededor del lado perpendicular a las bases? Dibujar la figura.

796. ¿Qué cuerpo engendra un triángulo isósceles al girar alrededor de su altura? ¿Y si gira alrededor de su base? Dibujar las dos figuras.

797. Definir una superficie de revolución. Definir meridianos o secciones meridianas de una superficie de revolución. Señalarlos en el dibujo.

798. Definir paralelos de una superficie de revolución. Dibujar una superficie de revolución en la que todos los paralelos sean iguales. Dibujar otra que no tenga paralelos iguales y señalar en ella dos o más paralelos.

799. Dibujar una superficie cónica de revolución y señalar en ella dos paralelos y dos secciones meridianas.

800. ¿Cuál es el lugar geométrico de las rectas del espacio que, cortando a otra en un mismo punto, forman con ella siempre el mismo ángulo?

801. Se tiene un segmento AB que gira alrededor de una recta EE' que está en un plano con él. ¿Qué figura engendra? Estudiar todos los casos y trazar las figuras correspondientes.

802. En un cilindro la sección meridiana es un rectángulo de altura triple de la base. Calcular sus dimensiones, sabiendo que la diagonal de dicha sección mide 1'4 decímetros.

803. Dado un cono de revolución de 15 cm. de generatriz y 6 cm. de radio, calcular: 1.º, su altura; 2.º, el radio de la sección producida por un plano perpendicular al eje en su punto medio; 3.º, la generatriz del tronco determinado por ese plano; 4.º, el área de la sección producida por un plano que pase por el eje.

23. Areas del cilindro y cono de revolución

127. Desarrollo de la superficie del cilindro de revolución. — Si suponemos formada la superficie curva de un cilindro de revolución por una capa de papel o cartulina, y la cortamos siguiendo una generatriz, podremos obtener, después de extenderla sobre un plano, el llamado *desarrollo de la superficie lateral.*

Este desarrollo (fig. 138) origina un rectángulo cuya base AB es igual a la longitud de la circunferencia de una de las bases del cilindro, y cuya altura DA equivale a la altura h del cilindro.

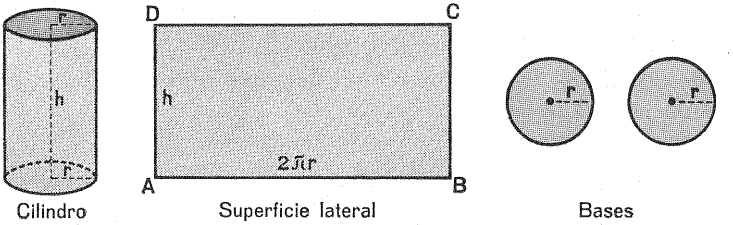


FIG. 138

El *desarrollo de la superficie total* de un cilindro estará compuesto del rectángulo originado por la superficie lateral más dos círculos, correspondientes a las bases (fig. 138).

128. Áreas lateral y total del cilindro de revolución. — Entendemos por *área lateral* del cilindro de revolución, el área del desarrollo de su superficie lateral. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de las bases.

ÁREA LATERAL. — *El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la longitud de la circunferencia de la base, por la longitud de la altura.*

En efecto: siendo el desarrollo de la superficie lateral un rectángulo y teniendo en cuenta qué son la base y la altura de ese rectángulo, tendremos:

$$A_l = 2\pi r \times h$$

fórmula en la que A_l representa el área lateral, r la medida del radio de la base y h la de la altura.

ÁREA TOTAL. — *Para hallar el área total, se suma al área lateral el duplo del área de uno de los círculos que forman las bases.*

Es decir, designando por A_t el área total, tendremos:

$$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h+r)$$

129. Desarrollo de la superficie del cono de revolución. — Si cortamos la superficie lateral del cono según una generatriz y la extendemos sobre un plano, tendremos el *desarrollo de la superficie lateral.*

Este desarrollo (fig. 139) da lugar a un sector circular cuyo radio es igual a la generatriz del cono, y cuyo arco base equivale a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

El *desarrollo de la superficie total* del cono será el de la lateral más un círculo igual a la base.

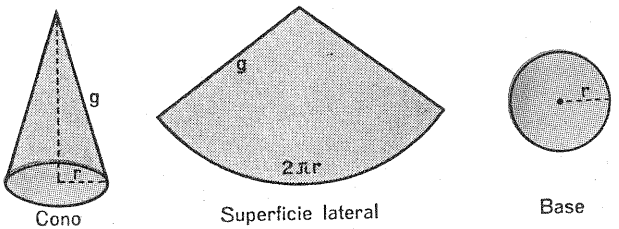


FIG. 139

130. Áreas lateral y total del cono. — Por *área lateral* del cono de revolución entendemos el área del desarrollo de su superficie lateral. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de la base.

ÁREA LATERAL. — *El área lateral de un cono de revolución, es igual al semiproducto de la longitud de la circunferencia de la base, por la longitud de la generatriz o lado.*

En efecto: siendo el desarrollo de la superficie lateral un sector circular y teniendo en cuenta a qué es igual el arco base y el radio de ese sector, podremos escribir:

$$A_l = \frac{2\pi r \times g}{2} = \pi r g$$

fórmula en la que r representa la medida del radio de la base del cono y g la de la generatriz.

ÁREA TOTAL. — *El área total de un cono de revolución se halla sumando al área lateral el área del círculo de la base.*

O sea, designando por A_t el área total, tendremos:

$$A_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g+r)$$

131. Desarrollo de la superficie del tronco de cono de revolución. — De modo análogo a como hemos obtenido el desarrollo de un cono, podemos obtener el de un tronco de cono (fig. 140).

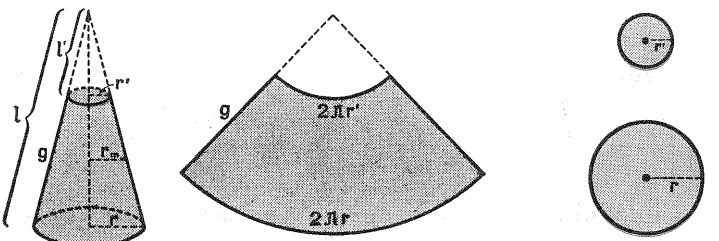


FIG. 140

132. Áreas lateral y total del tronco de cono. — Entendemos por *área lateral* del tronco de cono de revolución, el área del desarrollo de su superficie lateral. *Área total* es el área lateral aumentada en el área de las bases.

ÁREA LATERAL. — Consideremos (fig. 140) un tronco de cono y sean r y r' los radios de sus bases, g su generatriz, y l y l' las generatrices de los conos total y deficiente. El área lateral del tronco será igual a la di-

ferencia entre las áreas laterales de los conos total y deficiente. Es decir, vendrá expresada por

$$A_l = \pi r l - \pi r' l' = \pi (rl - r'l') \qquad [1]$$

Pero, por ser semejantes los triángulos formados por las alturas h y h', las generatrices l y l', y los radios r y r', se verifica:

$$\frac{r}{l} = \frac{r'}{l'} \quad \text{de donde} \quad \frac{r - r'}{l - l'} = \frac{r}{l} = \frac{r'}{l'}$$

y de aquí, teniendo en cuenta que $l - l' = g$, se obtiene:

$$\frac{r - r'}{g} = \frac{r}{l} \quad \text{de donde} \quad l = \frac{gr}{r - r'}$$

$$\frac{r - r'}{g} = \frac{r'}{l'} \quad \text{de donde} \quad l' = \frac{gr'}{r - r'}$$

Y llevando estos valores de l y l' a la fórmula [1], tendremos:

$$A_l = \frac{\pi (gr^2 - gr'^2)}{r - r'} = \frac{\pi (r^2 - r'^2) g}{r - r'} = \pi (r + r') g$$

Si observamos además que

$$A_l = \pi (r + r') g = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times g$$

resulta, en definitiva, que *el área lateral del tronco de cono de revolución es igual a la semisuma de las circunferencias de las bases por la generatriz o lado del tronco.*

ÁREA TOTAL. — *Se obtiene sumando al área lateral las áreas de las bases.*

$$A_t = \pi (r + r') g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

NOTA. — La sección producida en un tronco de cono por un plano perpendicular a la altura en su punto medio se denomina *base media.* Dicha sección será un círculo cuyo radio es la semisuma de los radios de las bases del tronco, por ser la paralela media de un trapecio. Luego, designando por r_m (fig. 140) al radio de la base media, tendremos:

$$A_l = 2\pi r_m g \qquad \text{y} \qquad A_t = 2\pi r_m g + \pi r^2 + \pi r'^2$$

EJERCICIOS

804. Hallar las áreas lateral y total de un cilindro de revolución cuya altura mide 5 m. y la circunferencia de la base 9 m.

805. Hallar la altura de un cilindro de revolución cuya área lateral es 46 cm^2 y el radio de la base mide 30 mm.

806. Hallar el radio de un cilindro de revolución cuya altura mide 18 cm. y el área lateral es 364 cm^2.

807. Calcular el área lateral de un cilindro de revolución cuyo radio mide 6 dm. y cuya altura, expresada en metros, es igual a la raíz cuadrada de 289.

808. Un rectángulo de 5 cm. de base y 12 cm. de altura gira alrededor de una recta paralela a la altura y situada a 3 cm. de distancia, exteriormente al rectángulo. Calcular las medidas de las superficies lateral y total del cuerpo que resulta.

809. Calcular las áreas lateral y total de un cilindro de revolución que al ser cortado por un plano que pasa por el eje, da como sección un rectángulo de 34 cm. de altura y 14'62 dm^2 de área.

810. Al cortar un cilindro de revolucción por un plano que pasa por el eje, se obtiene una sección cuya área es 12 m^2. Sabiendo que la circunferencia de la base mide 18'84 m., se desea hallar el área total de dicho cilindro.

811. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo de 3'6 m. de altura y 6 m. de diagonal. Calcular el área lateral de dicho cilindro.

812. El área lateral de un cilindro de revolución cuyo radio mide 9'5 m. es igual al área de la base. Calcular la altura.

813. Calcular el área lateral del cono engendrado por la rotación de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 6 y 9'2 m., al girar alrededor del cateto mayor.

814. Un cono de revolución de 8'10 dm. de radio y 1 m. de altura se corta por un plano perpendicular al eje a una distancia de la base igual a los 3/5 de la altura. Calcular las áreas lateral y total del cono que resulta.

815. La generatriz de un cono de revolucción es igual a la longitud de la circunferencia de la base, y su área lateral es 9 m^2. Determinar la altura del cono. (Tomar $\pi = 3'14$).

816. El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución de 4 m. de altura es un sector circular de 20° de amplitud. Hallar el radio de la base.

817. Hallar la amplitud del sector circular equivalente al desarrollo de un cono de revolución de 3 m. de altura y cuya base tiene 1 m. de radio.

818. Hallar la amplitud del sector circular que resulta al desarrollar la superficie lateral de un cono de revolución cuya altura y radio de la base están en la relación $\frac{3}{4}$.

819. Hallar el área de la superficie engendrada por los catetos de un triángulo rectángulo al girar 360° alrededor de la hipotenusa. Longitud de los catetos: 4'05 m. y 5'40 m.

820. Calcular la cantidad de chapa necesaria para construirle a un depósito cilíndrico de 1'56 dm. de diámetro una cubierta cónica de 3 dm. de altura.

821. Un cono y un cilindro, ambos de revolución y de la misma altura, tienen igual área lateral, y los desarrollos de sus superficies laterales son, respectivamente, un sector de 120° de amplitud y un rectángulo de 4 m. de base. Hallar la altura común de los cuerpos. ($\pi = 3'14$).

822. Los radios de las bases de un tronco de cono de revolución miden 19 cm. y 2'4 cm. La altura del tronco mide 12 cm. Calcular el área total del tronco.

823. Se tiene un cono de revolución de 12 cm. de altura y 5 cm. de radio de la base. Se corta por un plano paralelo al de la base que divide a la altura en dos partes iguales. Hallar el área lateral del tronco de cono que resulta.

824. Un cono de revolución tiene de radio 3 cm. y de generatriz 9 cm. Calcular a qué distancia del vértice hay que trazar un plano paralelo a la base para que el área lateral del tronco sea igual al área lateral del cono deficiente.

825. Calcular la altura de un tronco de cono de revolucción cuyos radios de las bases miden 6 m. y 4 m., si se sabe que el área total del tronco es doble de la lateral.

826. El radio de la base menor de un tronco de cono de revolución mide 5 m., la generatriz 5 m. también y la altura 4 m. Hallar el área lateral del tronco. ($\pi = 3'14$).

24. La esfera

133. La superficie esférica y la esfera. — SUPERFICIE ESFÉRICA *es la superficie engendrada por la revolución de una semicircunferencia en torno al diámetro que pasa por sus extremos* (fig. 141).

ESFERA *es la porción de espacio limitada por la superficie esférica,* o también: *esfera es el cuerpo engendrado por la revolución completa de un semicírculo en torno al diámetro que lo limita* (fig. 142).

Centro de la esfera o de la superficie esférica es el centro del semicírculo o de la semicircunferencia generatriz.

RADIO es la distancia del centro a un punto cualquiera de la superficie esférica. Todos los radios son iguales. Por consiguiente, *la superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de uno fijo, llamado centro.*

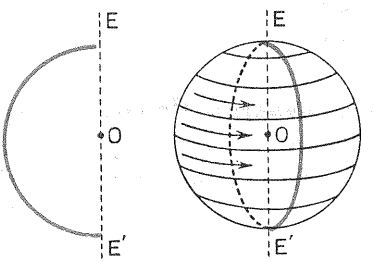


FIG. 141

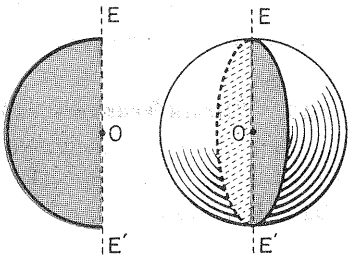


FIG. 142

Diámetro es el segmento rectilíneo que pasando por el centro une dos puntos de la superficie esférica. Todos los diámetros son iguales, por medir doble que un radio.

Plano diametral de una esfera es todo plano que pasa por el centro. Este plano divide a la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios.*

El centro, todo diámetro y todo plano diametral son, respectivamente, *centro, eje* y *plano de simetría* de la superficie esférica y de la esfera.

134. Secciones planas en la superficie esférica. — *La sección producida en la superficie esférica por un plano es una circunferencia* (figura 143).

Hipót.: ABC sección plana de la superficie esférica.

Tesis: ABC es una circunferencia.

Tracemos los radios OA, OB y OC que unan el centro de la esfera con tres puntos cualesquiera de la intersección del plano P con la superficie esférica. Tracemos luego la recta OD, perpendicular al plano P por el punto O, y unamos el pie D con los puntos A, B y C.

Ahora bien: las oblicuas OA, OB y OC al plano P son iguales, por ser radios de la esfera; luego, se apartarán igualmente del pie de la perpendicular OD, y, en consecuencia, será

$$DA = DB = DC$$

Pero A, B y C son tres puntos cualesquiera de la curva ABC; luego, dicha curva será una circunferencia, como se quería demostrar.

El teorema que acabamos de ver, equivale a decir que *la sección producida en la esfera por un plano es un círculo.*

135. Circunferencias máximas y menores. Polos. — *Circunferencias máximas* son las secciones producidas en la superficie esférica por planos que pasan por el centro; v. gr.: las circunferencias AMB y PMP' (fig. 144).

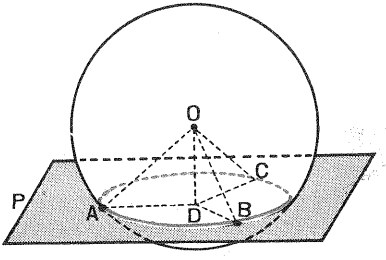


FIG. 143

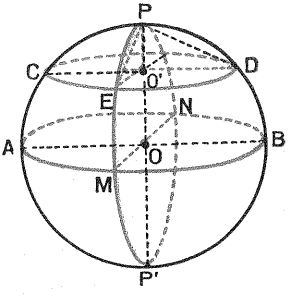


FIG. 144

Circunferencias menores son las secciones producidas en la superficie esférica por planos que no pasan por el centro; v. gr.: la circunferencia *CED* (fig. 144).

Todas las circunferencias máximas de una superficie esférica son iguales, pues todas tienen por radio el radio de la esfera.

Dos circunferencias máximas de una superficie esférica tienen un diámetro común que las divide en dos partes iguales; así, *MN* (fig. 144).

POLOS DE UNA CIRCUNFERENCIA *trazada en una superficie esférica son los extremos del diámetro perpendicular al plano de dicha circunferencia.*

Así, *P* y *P'* serán los polos de las circunferencias *AMB* y *CED* (figura 144).

Todas las circunferencias de una superficie esférica cuyos planos son paralelos tienen los mismos polos, puesto que el mismo diámetro es perpendicular a todos ellos.

En toda superficie esférica, cada uno de los polos de una circunferencia equidista de todos los puntos de dicha circunferencia.

En los triángulos rectángulos

$$PO'D \quad \text{y} \quad PO'E \text{ (fig. 144)}, \; PD = PE,$$

porque son hipotenusas de triángulos iguales.

Se llama *distancia polar* de una circunferencia, al segmento que tiene como extremos un polo y un punto cualquiera de la circunferencia.

136. La esfera terrestre. Coordenadas geográficas. — La Tierra tiene forma aproximadamente esférica. Gira sobre sí misma alrededor de un *eje* imaginario cuyas intersecciones con la superficie se llaman *polos* (P. Norte y P. Sur).

Si suponemos planos que pasen por el eje de la Tierra, sus intersecciones con la superficie serán circunferencias máximas, llamadas *meridianos*.

Asimismo, si imaginamos planos perpendiculares al eje en distintos puntos, las intersecciones con la superficie terrestre serán circunferencias menores, denominadas *paralelos*, excepto la determinada por el plano perpendicular al eje en el centro de la esfera terrestre, la cual es una circunferencia máxima que se llama *ecuador*.

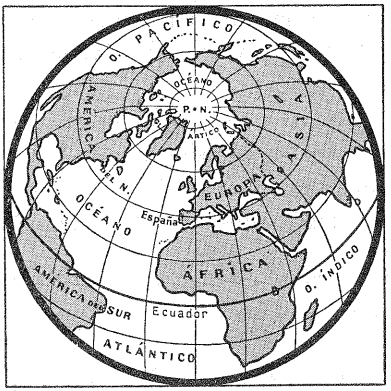


FIG. 145

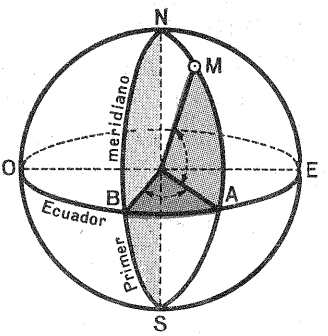


FIG. 146

COORDENADAS GEOGRÁFICAS. — Con el fin de poder localizar fácilmente los distintos puntos de la superficie, se considera al globo terrestre cubierto por la llamada *red de paralelos y meridianos* (fig. 145). Está constituida dicha red por 180 paralelos o líneas de latitud, cuyo radio disminuye a medida que se separan del ecuador, y 360 semimeridianos (o meridianos y antimeridianos). Los paralelos se numeran a partir del ecuador de 1 a 90, al Norte y Sur del ecuador, por lo que se habla de latitud Norte y latitud Sur. Los meridianos se numeran de 1 a 180, al Este y Oeste del primer meridiano o meridiano de Greenwich.

Los puntos que están en un mismo paralelo se dice que tienen la *misma latitud*, y los que están en el mismo meridiano, la *misma longitud*.

Latitud de un lugar es el arco de meridiano comprendido entre dicho lugar y el ecuador. Se expresa en el sistema sexagesimal, desde 0° a 90°. Hay latitud Norte y latitud Sur, según que el punto considerado esté en el hemisferio Norte o en el hemisferio Sur (fig. 146: latitud del punto M = arco AM; es latitud Norte).

Longitud de un lugar es el ángulo que forma el plano del meridiano del lugar y el del meridiano de Greenwich. Se expresa en el sistema sexagesimal, de 0° a 180°, y se dice longitud Este u Oeste, según el sentido en que se cuente a partir del meridiano origen. El diedro se mide por el rectilíneo correspondiente, y por eso los grados de longitud se cuentan sobre el ecuador, desde su intersección con el meridiano origen a su intersección con el meridiano del lugar (fig. 146: longitud del punto M = arco BA; es longitud Este u oriental).

La latitud y longitud de un lugar constituyen las llamadas *coordenadas geográficas* del mismo.

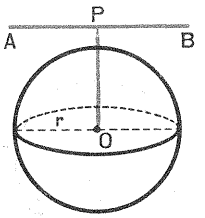


FIG. 147

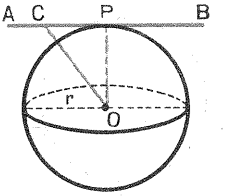


FIG. 148

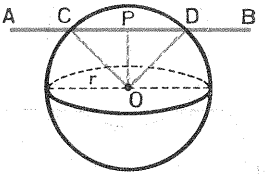


FIG. 149

137. Posiciones relativas de una recta y una superficie esférica. — Una recta puede ocupar tres posiciones distintas con relación a una superficie esférica.

1.ª La recta puede ser *exterior* a la superficie esférica, no teniendo con ella ningún punto común (fig. 147).

En este caso, la distancia del centro de la superficie esférica a la recta es *mayor* que el radio de la esfera ($OP > r$).

2.ª La recta puede ser *tangente* a la superficie esférica, o sea, tener con ella un punto común solamente (fig. 148).

Toda recta perpendicular a un radio en su extremo, es tangente a la superficie esférica.

En efecto: si AB es perpendicular al radio OP, éste lo es a su vez a AB, y cualquiera otra recta, OC por ejemplo, que una el centro O con un punto de AB distinto de P, es oblicua a la recta, y por tanto mayor que el radio OP. Luego, la recta es tangente a la superficie esférica, puesto que no tiene más puntos de contacto con ella que el punto P.

3.ª La recta, finalmente, puede ser *secante* a la superficie esférica, o sea, tener dos puntos comunes con ella (fig. 149).

En este caso, la distancia del centro de la esfera a la recta es *menor* que el radio ($OP < r$).

138. Posiciones relativas de un plano y una superficie esférica. — Tres son también las posiciones que pueden darse:

1.ª Si la distancia del centro O al plano P es *mayor* que el radio, el plano es *exterior* a la superficie esférica y no tiene ningún punto común con ella (fig. 150).

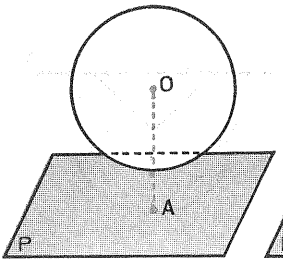


FIG. 150

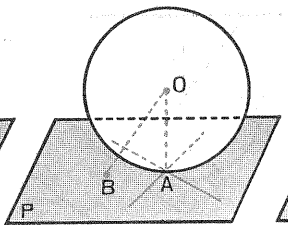


FIG 151

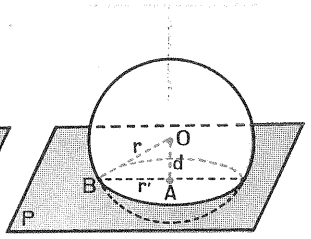


FIG. 152

2.ª Si la distancia del centro O al plano P es *igual* al radio, el plano y la superficie esférica tienen solamente un punto común: el punto A (fig. 151). Del plano P se dice que es *tangente* a la superficie esférica, y contiene a todas las rectas tangentes a la superficie esférica que se pueden trazar por el punto de contacto.

Todo plano perpendicular a un radio en su extremo, es tangente a la superficie esférica.

En efecto: si P es perpendicular a OA, OA lo será a P, y cualquiera otra recta, OB por ejemplo, que una el centro O con un punto del plano que no sea el punto A, ha de ser oblicua al plano, y por tanto, mayor que el radio OA. Luego, el plano P es tangente a la superficie esférica, puesto que no tiene más puntos de contacto con ella que el punto A.

3.ª Si la distancia del centro O al plano P es menor que el radio, el plano corta a la superficie esférica y se dice de él que es *secante*. La intersección será una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada al plano por el centro de la superficie esférica (fig. 152).

Si designamos por r al radio de la superficie esférica, por d a la distancia del centro O al plano P, y por r' al radio de la sección, tendremos:

$$r = \sqrt{d^2 + r'^2}; \qquad d = \sqrt{r^2 - r'^2}; \qquad r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

139. Figuras esféricas. — He aquí las principales *figuras esféricas*, llamadas así porque pueden considerarse como partes de la esfera o de la superficie esférica:

SUPERFICIES		CUERPOS
Zona esférica Casquete esférico	.....	Segmento esférico
Huso esférico	.....	Cuña esférica Sector esférico

ZONA ESFÉRICA es la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos secantes paralelos (fig. 153).

Las circunferencias determinadas por los planos secantes se llaman *bases*. *Altura* de la zona es la distancia entre los planos de las bases.

CASQUETE ESFÉRICO es cada una de las dos porciones en que queda dividida la superficie esférica por un plano secante (fig. 153).

Un casquete puede ser considerado como un caso particular de la zona esférica, si suponemos que uno de los planos paralelos es tangente a la superficie esférica.

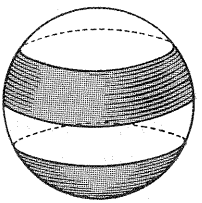


FIG. 153. Zona y casquete esféricos

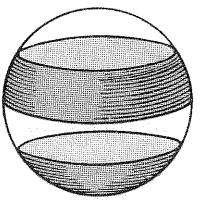


FIG. 154. Segmentos esféricos de 1 y 2 bases

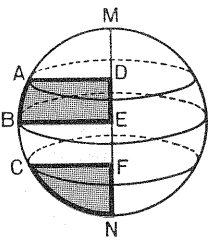


FIG. 155

La zona y el casquete esféricos pueden considerarse engendrados por un arco, menor que una semicircunferencia, que gira 360° alrededor del diámetro perpendicular a las bases.

Así, el arco *AB* (fig. 155), al girar alrededor del diámetro *MN*, engendra una zona, y el arco *CN*, un casquete.

SEGMENTO ESFÉRICO *de dos bases*, o *rebanada esférica*, es la porción de esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos (fig. 154).

SEGMENTO ESFÉRICO *de una base* es cada una de las dos partes en que queda dividida la esfera por un plano secante (fig. 154).

Si por los extremos del arco *AB* (fig. 155) y por el extremo *C* del arco *CN* se trazan perpendiculares, *AD*, *BE* y *CF*, al diámetro-eje *MN*, resultan las figuras planas *ABED* y *CNF* que, al girar 360° alrededor de dicho diámetro, engendran segmentos esféricos de dos y una base, respectivamente.

HUSO ESFÉRICO es la porción de superficie esférica comprendida entre las caras de un diedro cuya arista pasa por el centro de esa superficie esférica (fig. 156).

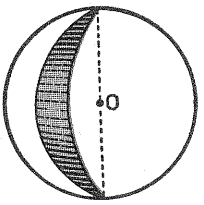


FIG. 156. Huso esférico

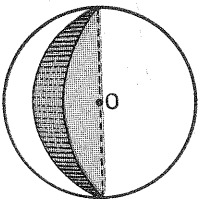


FIG. 157. Cuña esférica

CUÑA ESFÉRICA es la parte de esfera comprendida entre las caras de un diedro cuya arista pasa por el centro de la esfera (fig. 157).

La medida del diedro se llama *amplitud* del huso o de la cuña esféricos. El huso y la cuña pueden considerarse engendrados, respectivamente, por una semicircunferencia y un semicírculo que giran alrededor del diámetro que los limita un ángulo menor que 360°.

SECTOR ESFÉRICO es el cuerpo engendrado por un sector circular que gira alrededor de un diámetro que no le atraviesa (fig. 158).

Si el diámetro-eje pasa por uno de los radios extremos del sector circular, el sector esférico engendrado está limitado por un *casquete esférico* y una *superficie cónica* cuyo vértice coincide con el centro de la esfera (fig. 158, *a*).

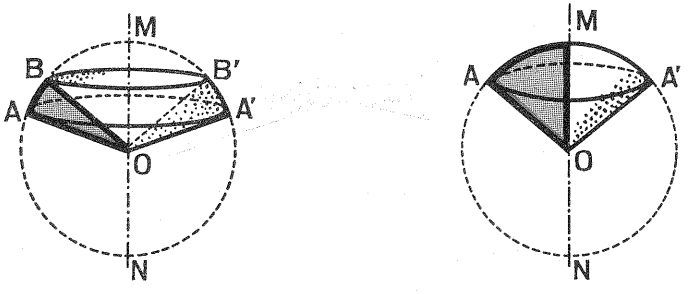


FIG. 158

Si el diámetro-eje no pasa por uno de los radios extremos, el sector esférico engendrado está limitado por una *zona esférica* y por *dos superficies cónicas* cuyo vértice, que es común, coincide con el centro de la esfera (fig. 158, *b*).

827. Si se corta una superficie esférica por un plano, ¿qué línea resulta? ¿Qué datos son necesarios para calcular el radio de la curva de intersección? Explicar cómo se calcularía ese radio conocidos los datos.

828. Explicar cómo se calcularía el radio de la superficie esférica circunscrita a un cubo.

829. Definir el segmento rectilíneo, el segmento circular y el segmento esférico. Dibujarlos.

830. ¿Todos los meridianos de una superficie esférica son iguales? ¿Y todos los paralelos? Y una superficie cilíndrica de revolución, ¿tiene todos sus paralelos iguales? ¿Y una superficie cónica? Razonar las respuestas y ayudarse del dibujo.

831. Un plano dista 3 m. del centro de una esfera cuyo radio mide 5 m. Calcular el radio de la sección producida en la esfera por ese plano.

832. El radio de una esfera mide 5 dm. Calcular el área del círculo producido por un plano que corta a la esfera a la distancia de 0'3 m. del centro.

833. Calcular el área de la sección producida en una esfera de radio $\sqrt{3}$ dm., por un plano que dista del centro $\sqrt{2}$ dm.

834. La sección producida en una superficie esférica por un plano, es una circunferencia de 14 cm. de diámetro. Calcular la distancia del centro de la superficie esférica al plano. El radio de la superficie esférica es 1'7 dm.

835. Sobre una esfera cuyo radio mide 61 cm. está dibujada una circunferencia de radio igual a 11 cm. ¿A qué distancia de su polo está el centro de dicha circunferencia?

836. Una esfera cuyo radio mide 65 cm. se corta por dos planos paralelos, produciéndose secciones que son círculos con radios que miden 39 cm. y 60 cm. Se desea calcular la distancia que hay entre esos dos planos, primero, si las secciones están en el mismo hemisferio, y segundo, si están en hemisferio distinto.

837. Dos planos paralelos cuya distancia es de 5 cm. cortan a una esfera al mismo lado del centro. Las secciones producidas tienen 28 y 36 cm. de diámetro. Hallar el radio de la esfera.

838. Supuesta la Tierra esférica, y que sus dimensiones son las que corresponden a la definición de metro, calcular la longitud de un arco de meridiano de 1 minuto.

839. Calcular a partir de la definición de metro el radio de la Tierra.

840. Sabiendo que Dunkerque y Barcelona están sobre el mismo meridiano, y que la primera tiene 52° 2′ de latitud N. y la segunda 41° 22′ de latitud N., se desea hallar: 1.º, la distancia entre Barcelona y el ecuador; 2.º, la distancia entre Dunkerque y Barcelona.

841. La ciudad *A* tiene de longitud geográfica 80° E. y de latitud 45° N. La ciudad *B* tiene de longitud 25° E. y de latitud 45° N. Se pide la distancia entre una y otra, marchando sobre el arco de paralelo que las une.

25. Areas de figuras esféricas

140. Proceso para hallar el área de superficies esféricas. — En el camino que seguiremos para calcular las áreas de figuras esféricas, recorreremos las siguientes etapas:

1) FUNDAMENTO. — Estudio del área de la superficie engendrada por un segmento que gira alrededor de un eje coplanario con él.

2) PASO INTERMEDIO. — Cálculo del área de la superficie engendrada por una línea poligonal regular que gira en torno a un eje coplanario que pase por su centro.

3) LÍMITE. — Cálculo del área de la superficie engendrada por un arco de circunferencia o por una semicircunferencia en giro, considerados ambos como líneas poligonales regulares de infinito número de lados.

141. Área de la superficie engendrada por la rotación de un segmento. — Tres posiciones puede tener un segmento $AB = l$ respecto a un eje XX' coplanario con él (fig. 159):

1.ª *Posición:* Oblicuo al eje, apoyado en él su extremo.

2.ª *Posición:* Oblicuo, sin contacto con el eje.

3.ª *Posición:* Paralelo al eje.

Llamaremos normal del segmento l a la parte de perpendicular al segmento en su punto medio, comprendida entre él y el eje. La designaremos por n. Designamos también por p a la proyección del segmento l sobre el eje.

En la 1.ª y 2.ª posición, los triángulos rectángulos ABC y MNP son semejantes, por tener un ángulo agudo igual (áng. en A=áng. en M, por tener los lados respectivamente perpendiculares). Luego,

$$\frac{l}{p} = \frac{n}{r} \quad \text{de donde} \quad lr = np \qquad [1]$$

1.ª POSICIÓN. — El área de la superficie engendrada por l es igual al área lateral de un cono de radio $BC = 2r$. Luego (130):

$$\text{Ár. sup. eng. } l = \pi \cdot 2r \cdot l = 2\pi r \cdot l = 2\pi np \quad \text{según [1]}$$

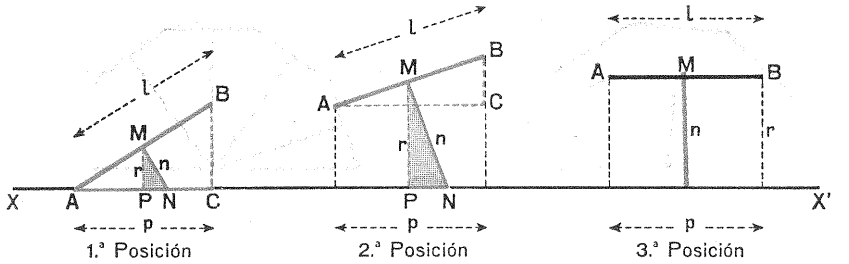


FIG. 159

2.ª POSICIÓN. — El área de la superficie engendrada por l es igual al área lateral de un tronco de cono cuyo *radio medio* es r. Luego (132, nota):

$$\text{Ár. sup. eng. por } l = 2\pi r l = 2\pi n p$$

según [1]

3.ª POSICIÓN. — El área de la superficie engendrada por l es igual al área lateral de un cilindro de radio $r = n$ y altura $l = p$. Luego (128):

$$\text{Ár. sup. eng. por } l = 2\pi r l = 2\pi n p$$

Vemos, por tanto, que en las tres posiciones se verifica lo siguiente:

El área de la superficie engendrada por un segmento que gira en torno a un eje coplanario, que no le atraviesa, es igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio igual a la normal del segmento, por la proyección del mismo segmento sobre el eje.

CASO EXCEPCIONAL. — Si el segmento AB es perpendicular al eje de giro, resulta evidente que el área de la figura engendrada (círculo o corona circular) no puede calcularse de acuerdo con el teorema anterior, cuyo enunciado pierde todo su sentido. (Hágase la figura).

142. Área de la superficie engendrada por una poligonal regular. — *Se dice que es regular una línea poligonal, cuando está formada por lados y ángulos iguales*; v. gr.: la *ABCD* (fig. 160).

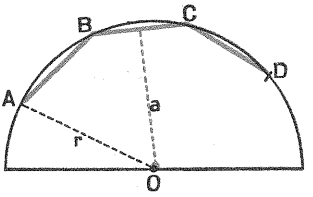


FIG. 160

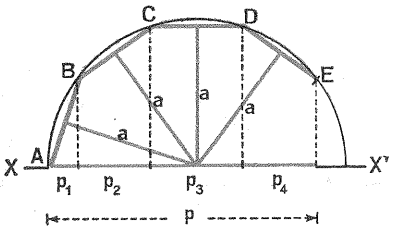


FIG. 161

Se demuestra en Geometría plana, al estudiar las propiedades de los polígonos regulares, que en el plano determinado por una línea poligonal regular existe un punto equidistante de los vértices de aquélla. Se puede, por tanto, trazar una circunferencia que pase por los vértices de la poligonal, de la cual diremos que es la circunferencia *circunscrita*; el centro *O* de ésta se llama también *centro* de la línea poligonal regular. Dicho centro *O* equidista de los lados *AB*, *BC*, ..., y a la distancia *a* del centro a uno de ellos se denomina *apotema* de la línea poligonal regular.

TEOREMA. — *El área de la superficie engendrada por una poligonal regular que gira en torno a un eje coplanario, que pase por su centro sin atravesarla, es igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio igual a la apotema de la poligonal, por la proyección de esa misma poligonal sobre el eje.*

En efecto: Sea una poligonal regular *ABCDE* (fig. 161) y supongamos que gira alrededor del eje *XX'* que pasa por el centro de la poligonal y no la atraviesa.

La superficie engendrada por la poligonal será igual a la suma de las superficies engendradas por los lados que la forman.

Es decir: aplicando lo dicho en el párrafo anterior, tendremos:

$$\text{Área eng. por } AB = 2\pi a \cdot p_1$$
$$\text{Área eng. por } BC = 2\pi a \cdot p_2$$
$$\text{Área eng. por } CD = 2\pi a \cdot p_3$$
$$\text{Área eng. por } DE = 2\pi a \cdot p_4$$

sumando: Área eng. por $ABCDE = 2\pi\ a\,(p_1+p_2+p_3+p_4) = 2\pi a \cdot p$

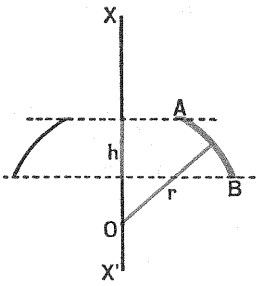


FIG. 162

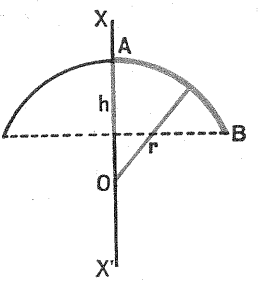


FIG. 163

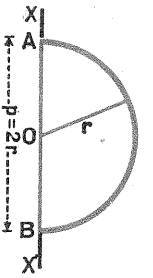


FIG. 164

143. Áreas de la zona y casquete esféricos. — Si duplicamos una, dos, tres, ..., infinitas veces, el número de lados de una poligonal regular, ¿cuál será el *límite* al que tiende esa poligonal? ¿Y el de su apotema? Claramente se ve que el límite de la poligonal es un arco de circunferencia; y el de su apotema, el radio de ese arco.

Ahora bien: ¿qué figura engendra un arco cuando gira alrededor de un diámetro que no le atraviesa? Recordemos (139) que la figura obtenida es una zona o un casquete esférico. O bien, si el arco es una semicircunferencia, resulta una superficie esférica.

Por consiguiente, designando por h la altura de una zona o de un casquete esférico (figs. 162 y 163) y por r al radio de la esfera a que pertenece, tendremos:

$$\text{Ár. eng. arc. } AB = \text{ár. zona o casq.} = 2\pi r \cdot h$$

Es decir: *el área de la zona o del casquete esféricos es igual al producto de la circunferencia máxima de la esfera, por la altura de la zona o del casquete.*

144. Área de la superficie esférica. — La superficie esférica puede considerarse engendrada por la rotación de una semicircunferencia alrededor del diámetro que la limita. Como la proyección de la semicircunferencia sobre el diámetro es igual a $2r$, tendremos (fig. 164):

$$\text{Ár. eng. arc. } AB = \text{ár. sup. esf.} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = \pi (2r)^2$$

Es decir: *el área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo, o a la de un círculo que tuviera por radio el diámetro de la esfera.*

145. Área del huso esférico. — *La superficie del huso esférico es proporcional a su amplitud, es decir, a la abertura del diedro que lo determina.*

En efecto: Hay correspondencia en la igualdad y en la suma; ya que, en una misma esfera o en esferas iguales, a igual amplitud corresponde igual huso; a doble abertura, doble huso; a triple amplitud, triple huso; etcétera.

Establecida esta proporcionalidad, para hallar el área de un huso cuyo diedro mide $n°$ sexagesimales en una superficie esférica de radio r (figura 165), razonaremos así:

La superficie esférica puede considerarse como un huso de 360°, y su área $4\pi r^2$; luego, un huso de 1° tendrá por área

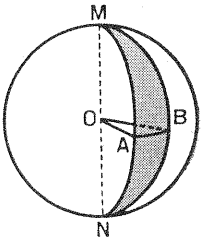


FIG. 165

$$\frac{4\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2}{90}$$

y el área, A, de un huso de $n°$ será

$$A = \frac{\pi r^2 n}{90}$$

EJERCICIOS

Calcular el área de la superficie engendrada por un segmento de 10 cm. de longitud, que tiene con el eje de giro las siguientes posiciones:

842. Tiene un extremo en el eje y forma con éste un ángulo de 30°.

843. Tiene un extremo en el eje y forma con éste un ángulo de 90°.

844. Es paralelo al eje y está situado a 5 cm. de distancia de él.

845. El punto medio dista 4 cm. del eje y forma con éste un ángulo de 30°.

Calcular el área total del cuerpo engendrado por la rotación de un cuadrado en las siguientes condiciones:

846. El eje de giro es perpendicular al lado en su punto medio.

847. El eje contiene al lado.

848. El eje contiene a la diagonal.

849. El eje pasa por un vértice y es perpendicular a la diagonal que parte de dicho vértice.

Calcular el área total del cuerpo engendrado por la rotación de un hexágono regular en las siguientes condiciones:

850. El eje de giro es perpendicular al lado en su punto medio.

851. El eje contiene al lado.

852. El eje contiene a la diagonal.

853. El eje pasa por un vértice y es perpendicular a la diagonal que parte de dicho vértice.

854. Hallar el área total del cuerpo engendrado por la rotación de un triángulo equilátero alrededor de un eje perpendicular a la base en uno de sus extremos. Altura, $h = 10\sqrt{3}$.

855. Calcular el área de una zona esférica limitada por dos planos paralelos que distan 4 y 8 cm. del centro de la superficie esférica, si el radio de ésta mide 10 cm.

856. Calcular el área de un casquete esférico de 4 cm. de altura, perteneciente a una superficie esférica de 6 cm. de radio.

857. Calcular el radio de la circunferencia de la base de un casquete esférico de igual área que una zona de 3 cm. de altura, pertenecientes ambos a la misma superficie esférica.

858. Se trazan dos planos paralelos, equidistantes 4 cm. del centro de una esfera de 1'2 dm. de radio. Hallar el área de la zona determinada por dichos planos.

859. Una esfera de 13 cm. de radio es cortada por un plano que dista de su centro 5 cm. Hallar el área del menor de los casquetes en que queda dividida la superficie esférica.

860. Calcular en dm^2 el área de una superficie esférica cuya circunferencia máxima tenga 314 mm. de longitud.

861. La porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, distantes entre sí 6 cm., es 188'40 cm^2. Calcular la superficie de la esfara. (Tomar $\pi = 3'14$).

862. Determinar el área de la superficie esférica circunscrita a un cubo de 24 cm^2 de área.

863. Hallar el área de un huso esférico de amplitud 52°, situado en una superficie esférica de radio 8/5 de m.

864. Calcular el área de un huso esférico de 30°, sabiendo que la longitud de la circunferencia máxima es 18'84 cm. ($\pi = 3'14$).

865. Hallar la amplitud de un huso esférico perteneciente a una superficie esférica de 3 dm. de radio, sabiendo que el área del huso es 15'7 dm^2. ($\pi = 3'14$).

866. Hallar el área del huso esférico de 37° de amplitud, situado en una superficie esférica de 5 cm. de radio.

867. Calcular el radio de una superficie esférica, sabiendo que un huso de la misma de 100° de amplitud tiene de área 31'4 dm^2. ($\pi = 3'14$).

26. Volúmenes de prismas y cilindros

146. Volumen. — *Es la medida del espacio ocupado por un cuerpo.*

Unidad de volumen es el volumen de un cubo que tiene por arista la unidad de longitud. La más usada es el *metro cúbico* (m^3), que es un cubo de 1 m. de arista. También se emplean el *decímetro cúbico* (dm^3), el *centímetro cúbico* (cm^3) y el *milímetro cúbico* (mm^3), que son cubos que tienen, respectivamente, 1 dm, 1 cm. y 1 mm. de arista.

Cuerpos equivalentes son los que tienen el mismo volumen, aunque su forma sea distinta.

La Geometría proporciona reglas que permiten hallar el volumen de un cuerpo cuando se conocen las medidas de algunos de sus elementos: *un área y una dimensión*, o bien *tres dimensiones*.

147. Volumen del ortoedro. — *El volumen de un ortoedro es igual al producto del área de la base por la altura, o lo que es igual, al producto de sus tres dimensiones.*

En efecto: sea un ortoedro AB (fig. 166) cuyas aristas concurrentes en un vértice miden, respectivamente, 5 cm., 4 cm. y 3 cm. El área de su base será $5 \times 4 = 20$ cm^2. Sobre cada uno de estos cm^2 se puede colocar 1 cm^3, como el MN, obteniéndose una capa de 1 cm. de altura, formada

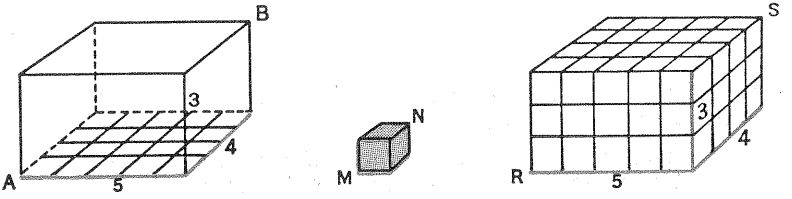


FIG 166

por 20 cm^3 (5 filas de a 4 cm^3). Para completar el ortoedro RS, igual al AB, son necesarias 3 de esas capas; por tanto, su volumen será

$$20 \text{ cm}^3 \times 3 = 60 \text{ cm}^3 \quad \text{o lo que es igual} \quad 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$$

FÓRMULA. — Designando por a, b y c la longitud de las aristas y por V el volumen del ortoedro, tendremos:

$$V = a \times b \times c$$

o bien, representando por B el área de la base y por h la altura del ortoedro

$$V = B \times h$$

VOLUMEN DEL CUBO. — El cubo es un ortoedro cuyas tres dimensiones son iguales. Designando por a la longitud de la arista de un cubo y por V el volumen, se tendrá:

$$V = a \times a \times a = a^3$$

Es decir, que *el volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.*

148. Principio de Cavalieri (*). — Supongamos (fig. 167) dos montones formados por el mismo número de ejemplares del mismo o de distintos libros, antes de ser encuadernados: los del primer grupo, cosidos y cortados, simplemente; los del segundo, después de enconvar el lomo, como suele hacerse para encuadernarlos.

Es evidente que el volumen del cuerpo que forma el conjunto del segundo montón es igual al volumen del cuerpo formado por el primero,

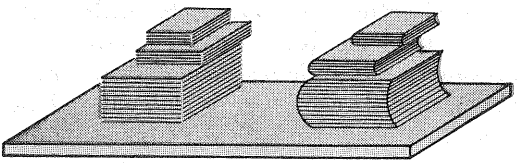


FIG. 167

(*) Buenaventura CAVALIERI (1598-1647), religioso italiano, gran géometra y astrónomo, discípulo de Galileo. Perfeccionó muchos capítulos de las Matemáticas, pero la celebridad la debe a su «Principio para el cálculo de volúmenes», de cual dedujo muchos resultados nuevos.

puesto que al hacer la curvatura del lomo de los libros, solamente se ha modificado la posición de las hojas. Diríamos también que los dos montones tienen el mismo volumen, en el caso de que cada una de las hojas de uno fuera equivalente (aunque no fuera igual) a la correspondiente del otro.

El enunciado general de este hecho tan simple constituye el llamado *principio de Cavalieri*, que puede expresarse así:

Si dos cuerpos son tales que las secciones producidas en ellos por cada posición de un plano que se mueve paralelamente a sí mismo son siempre equivalentes (esto es, tienen igual área), se verifica que los dos cuerpos son equivalentes (esto es, tienen el mismo volumen) (fig. 168).

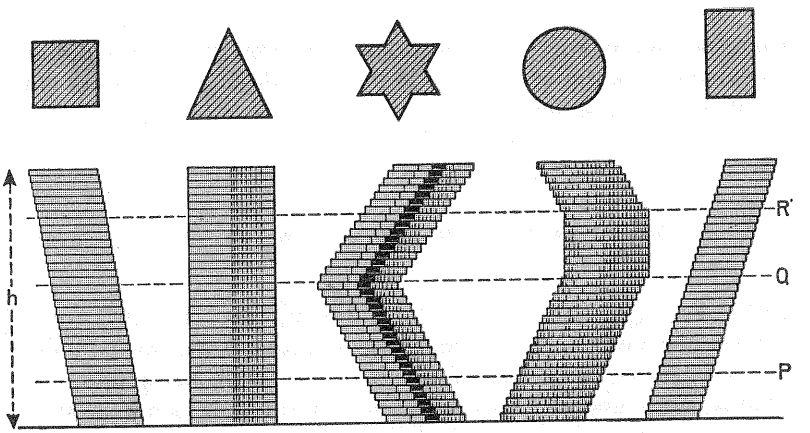


FIG. 168. PRINCIPIO DE CAVALIERI: Secciones equivalentes; volúmenes iguales.

El principio de Cavalieri se comprende fácilmente si suponemos, como en el ejemplo anterior, que los cuerpos están formados por muchísimas láminas superpuestas, de pequeña altura, como hojas de papel, por ejemplo. El volumen de cada lámina es igual al área de la base por la altura; por tanto, las láminas correspondientes a un mismo plano secante tienen el mismo volumen, y los cuerpos dados, como suma que son de tales láminas, serán equivalentes.

149. Volúmenes de prismas y de cilindros de revolución.— Como aplicación inmediata del principio de Cavalieri, podemos deducir

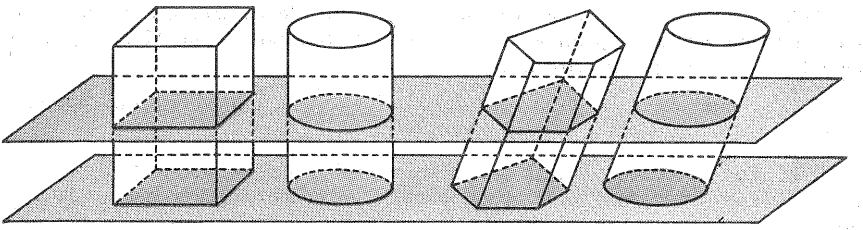


FIG. 169. Equivalencia de primas y cilindros de alturas iguales y bases equivalentes.

la regla para hallar los volúmenes de prismas y cilindros, rectos u oblicuos, de bases cualesquiera (fig. 169).

Supongamos, en efecto, un prisma o un cilindro. Comparándolo con un ortoedro de base equivalente e igual altura, vemos que, como todas las secciones producidas por planos paralelos a las bases son iguales a las bases respectivas, y, por tanto, equivalentes entre sí, ambos cuerpos tienen igual volumen. Es decir: el volumen del prisma o del cilindro se obtiene como el del ortoedro, multiplicando el área de la base por la medida de la altura.

En general, diremos:

El volumen de un prisma o de un cilindro, recto u oblicuo, de base cualquiera, es igual al producto del área de la base por la longitud de la altura.

FÓRMULAS. — Designando por V el volumen, por B el área de la base y por h la altura, tendremos:

$$V = B \times h$$

Si el cilindro es de revolución y r es el radio de su base, como $B = \pi r^2$, resultará:

$$V = \pi r^2 \times h$$

EJERCICIOS

868. Las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son directamente proporcionales a 2, 2 y 5. Sabiendo que la suma de sus dimensiones es igual a 30 cm., determinar el área total y el volumen.

869. Hallar el volumen de un paralelepípedo recto de base cuadrada, sabiendo que la suma de todas sus aristas es 2 m. y que la altura tiene 23 cm. más que la longitud del lado de la base.

870. En un ortoedro cuyo volumen es 140 m^3, de las tres aristas que concurren en un vértice, una mide 4 m. y entre las otras dos suman 12 m. Se desea calcular el área total del ortoedro.

871. Hallar los lados de la base de un ortoedro de 1 m. de altura, sabiendo que el área total es igual a 280 dm^2 y la capacidad, 3 Hl.

872. Los perímetros de las caras de un ortoedro son 54 cm., 80 cm. y 96 cm. Se desea calcular el área total, el volumen del ortoedro y la longitud de la diagonal.

873. Calcular el volumen de un cilindro circunscrito a un ortoedro que tiene de altura 10 cm. y por base un cuadrado de 6 cm. de lado.

874. Un depósito de forma ortoédrica tiene de volumen 4'5 m^3; el largo es doble que el ancho, y la profundidad es los $\frac{2}{3}$ del ancho. Calcular las tres dimensiones del depósito.

875. La diagonal de un cubo mide $3\sqrt{3}$ cm. Hallar el área y el volumen de ese cubo.

876. Calcular el volumen de un cubo, sabiendo que la diagonal de sus caras mide 14 cm.

877. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya área total es 21'66 m^2?

878. Calcular el área lateral y el volumen de un prisma hexagonal regular de 8 m. de arista básica y 32 cm. de arista lateral.

879. Calcular el volumen de un prisma hexagonal regular que tiene de área lateral 96 cm^2, sabiendo que la arista básica vale 2 cm.

880. Un estanque tiene la forma de un prisma hexagonal regular, de 3 m. de arista básica y 5 m. de altura. Para vaciarlo existe un caño que arroja 90 litros por minuto. ¿Qué tiempo tardarán en vaciarse las $\frac{3}{4}$ partes del estanque?

881. Calcular el volumen de un prisma que tiene de altura 1 dm. 5 cm., y su base es el cuadrado inscrito en una circunferencia de 5 cm. de radio.

882. La base de un prisma, de 10 m. de altura, es un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 6 m. Calcular su volumen.

883. Hallar el volumen de un cilindro cuya circunferencia básica mide 6'28 metros y su altura es doble del diámetro de la base.

884. En una vasija cilíndrica de 1 dm. de diámetro se vierten 1'57 Kg. de agua. ¿Qué altura tiene el agua en la vasija?

885. Con el agua contenida en un depósito cilíndrico de 1 m. de diámetro por 3 m. de altura, ¿cuántas veces podremos llenar una vasija de 5 litros?

886. Calcular el volumen de un cilindro equilátero (diámetro de la base igual a la altura) cuya sección meridiana tiene de área 36 cm^2.

887. Hallar la longitud de un tubo de plomo que tiene 32 mm. de diámetro exterior y 24 milímetros de diámetro interior y 1 Kg. de peso. Densidad del plomo = 11'34 g./cm^3.

888. Una vasija cilíndrica de 2 dm. de radio y 1 m. de altura está llena de aceite, cuyo precio es de 14'75 ptas. litro. ¿Cuánto importa el aceite contenido en la vasija?

889. Calcular el volumen del cilindro circunscrito a un ortoedro que tiene de altura 10 cm. y por base un cuadrado de 6 cm. de lado.

890. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo cuya área mide 314 m^2. Se sabe que la sección meridiana es un cuadrado. Hallar el volumen del cilindro.

891. Hallar la diferencia entre el volumen de un cilindro de 6 m. de radio y 10 m. de generatriz y el prisma regular de base cuadrada inscrito en él.

892. Una columna cilíndrica hueca tiene de radio exterior 9 cm. y de radio interior 6 cm. La altura de la columna es 3'25 m. Calcular el peso de dicha columna sabiendo que la densidad del material es 7'4 g./cm^3.

27. Volúmenes de pirámides y conos

150. Equivalencia de pirámides y de conos. — Supongamos (figura 170) varias pirámides y varios conos de alturas iguales y bases equivalentes. Si a todos estos cuerpos los imaginamos apoyados sobre un mismo plano, sucederá que todo otro plano secante, paralelo al plano de la base, determinará en cada cuerpo secciones semejantes a las bases respectivas y de área reducida en la misma razón.

$$\frac{d^2}{D^2} \quad \text{(ver párrafos 119, 2.° y 3.° y 124)}$$

siendo d y D, respectivamente, las distancias comunes del plano secante y del plano de las bases a los vértices.

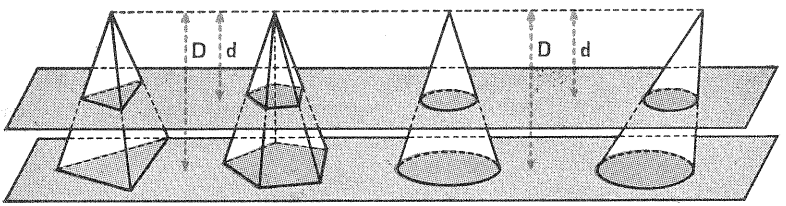


FIG. 170. Equivalencia de pirámides y conos de alturas iguales y bases equivalentes.

Ahora bien: como las áreas de las bases son iguales, las de las secciones, reducidas en la misma razón, también lo serán. Luego, las pirámides y conos de alturas iguales y bases equivalentes verifican el *principio de Cavalieri*, y, por consiguiente, diremos:

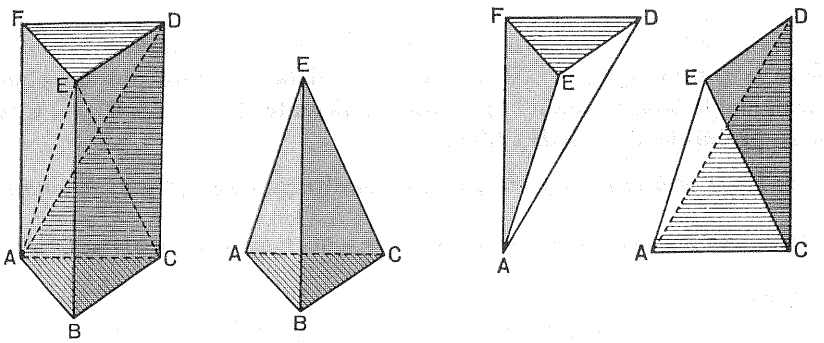
Dos pirámides o dos conos de alturas iguales y bases equivalentes son equivalentes, es decir, tienen el mismo volumen.

151. Volumen de la pirámide triangular. — Sea la pirámide triangular *EABC* (fig. 171, *b*).

Si por los puntos A y C trazamos segmentos AF y CD iguales y paralelos a BE, es fácil luego completar el prisma triangular $ABCDEF$ (figura 171, *a*), el cual tiene la misma base e igual altura que la pirámide.

Si de este prisma separamos la pirámide $EABC$, queda una pirámide cuadrangular $EACDF$, cuya base es el paralelogramo $ACDF$ y cuyo vértice es el punto E. Trazando ahora la recta AD, quedará esta pirámide descompuesta en otras dos triangulares $EADF$ y $EACD$ (figs. 171, *c* y *d*).

Estas dos últimas pirámides son equivalentes entre sí, por tener bases equivalentes (las dos mitades del paralelogramo $ACDF$) y la misma altura (las bases ADF y ACD están en el mismo plano y el vértice opuesto es común a las dos pirámides).



a *b* *c* *d*

FIG. 171

Ahora bien: si en la pirámide $EADF$ tomamos por base el triángulo DFE y por vértice el punto A, se ve que es equivalente a la $EABC$, por tener bases iguales ABC y DFE y la misma altura, que es la del prisma.

En resumen: el prisma ha quedado descompuesto en tres pirámides triangulares equivalentes; luego, *una de ellas es la tercera parte del prisma.*

Por consiguiente, teniendo en cuenta la expresión del volumen del prisma, diremos: *El volumen de una pirámide triangular es igual al tercio del producto del área de la base por la longitud de la altura.*

152. Volúmenes de pirámides y de conos. — Cualquier pirámide o cualquier cono es equivalente a una pirámide triangular que tenga la misma altura y base equivalente a la del cono o pirámide dada (fig. 170). De aquí que digamos:

El volumen de una pirámide cualquiera, o de un cono, es igual (como el de la pirámide triangular) *al tercio del producto del área de la base por la longitud de la altura.*

FÓRMULAS. — Designando por V el volumen, por B el área de la base y por h la altura, tendremos:

$$V = \tfrac{1}{3} B \times h$$

Si el cono es de revolución y r es el radio de la base, como $B = \pi r^2$, resultará:

$$V = \tfrac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

153. Volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono. — Dada la pirámide $P = VACD$ (fig. 172), si la cortamos por un plano paralelo a la base resultan la pirámide deficiente $P = VA'C'D'$ y el tronco de pirámide $T = ACDA'C'D'$.

Si H, H' y h son, respectivamente, las alturas de P, P' y T, tenemos:

Volumen V_t del tronco = volumen V_p de P − volumen $V_{p'}$ de P'

Pero

$$V_p = \tfrac{1}{3} B \cdot H \qquad \text{y} \qquad V_{p'} = \tfrac{1}{3} B'H'$$

Por tanto:

$$V_t = V_p - V_{p'} = \tfrac{1}{3} (B \cdot H - B' \cdot H') \qquad [1]$$

H y H' las podemos calcular con los sistemas

$$\begin{cases} H - H' = h \\ \dfrac{H^2}{B} = \dfrac{H'^2}{B'} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{matrix} H - H' = h \\ \dfrac{H}{\sqrt{B}} = \dfrac{H'}{\sqrt{B'}} \end{matrix}$$

y haciendo $x = \sqrt{B}$, $y = \sqrt{B'}$, se obtiene el sistema bajo esta forma más sencilla:

$$\begin{cases} H - H' = h \\ \dfrac{H}{x} = \dfrac{H'}{y} \end{cases}$$

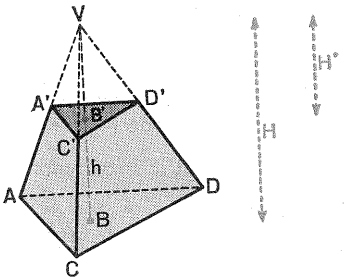


FIG. 172

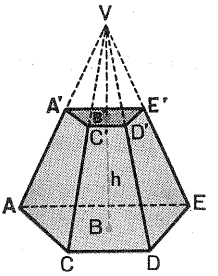


FIG. 173.

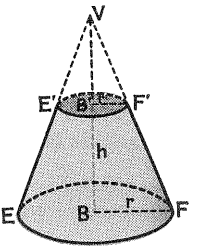


FIG. 174

De aquí resulta:

$$\frac{H}{x} = \frac{H'}{y} = \frac{H - H'}{x - y} = \frac{h}{x - y} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} H = \dfrac{hx}{x - y} \\ H' = \dfrac{hy}{x - y} \end{cases}$$

Sustituyendo en [1], tenemos:

$$V_t = \tfrac{1}{3}\left(x^2 \frac{hx}{x - y} - y^2 \frac{hy}{x - y}\right) = \frac{h\,(x^3 - y^3)}{3\,(x - y)} = \frac{h}{3}\,(x^2 + xy + y^2)$$

y finalmente:

$$V_t = \tfrac{1}{3}\,h\,(B + \sqrt{BB'} + B')$$

Igual razonamiento e igual resultado se obtiene para el tronco de una pirámide cualquiera (fig. 173), y para el tronco de cono (fig. 174).

Podemos, pues, enunciar: *El volumen de un tronco de pirámide cualquiera, o de un tronco de cono, es igual a la tercera parte del producto de la longitud de la altura por una suma formada por las áreas de las bases del tronco y una media proporcional entre ellas.*

154. Observación. — Si el tronco de cono es de revolución, como $B = \pi r^2$ y $B' = \pi r'^2$, resultará:

$$V = \tfrac{1}{3}\,h\,(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}) = \tfrac{1}{3}\,h\,\pi\,(r^2 + r'^2 + r\,r')$$

EJERCICIOS

893. Hallar el volumen de una pirámide cuadrangular regular, sabiendo que el lado de la base mide 4 cm. y que el área lateral es doble del área de la base.

894. El volumen de una pirámide triangular regular es igual a $36\sqrt{3}$ cm^3, y su altura, 4 cm. Determinar el área lateral de dicha pirámide.

895. Calcular el volumen de una pirámide triangular regular cuya base tiene de lado 2 m. y su apotema mide 5 m.

896. Calcular el volumen del tetraedro que resulta al cortar un cubo de 1 dm. de arista por un plano determinado por los extremos de 3 aristas concurrentes en un vértice.

897. La superficie total de un tetraedro regular es de $4\sqrt{3}$ m^2. Determinar el volumen de dicho cuerpo.

898. Se tiene un tetraedro regular de arista igual a 3 cm.; se pide hallar su área total y su volumen.

899. La diagonal de un cubo mide 36 cm. Calcular el volumen de la pirámide regular que tiene por base una cara del cubo y el vértice está en la cara opuesta.

900. Una pirámide regular hexagonal tiene iguales todas sus aristas, de 10 cm. cada una. Calcular la altura de la pirámide y su volumen.

901. El lado de la base y la apotema de una pirámide hexagonal regular suman 19 cm. Si el área lateral de la pirámide es 234 cm^2, ¿cuál es su volumen?

902. Calcular el volumen de una pirámide regular cuya arista lateral mide 25 cm. y cuya base es un cuadrado de 25 cm. de lado.

903. Calcular el volumen de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 2 dm. de lado y cuya apotema mide 3 dm.

904. Calcular el área lateral y el volumen de una pirámide regular de base cuadrada, en la que todas las aristas miden 6 m.

905. Hallar el volumen de una pirámide de 2'75 m. de altura, que tiene por base un rombo cuyas diagonales miden 0'85 m. y 0'60 m.

906. ¿Cuántos mm^3 medirá el volumen de una pirámide cuadrangular regular, si la apotema de la base mide 30 cm. y la apotema de la pirámide mide 5 dm.?

907. Calcular el volumen del cono engendrado por un triángulo rectángulo al girar alrededor del cateto menor, que mide 25 cm., sabiendo que el otro cateto mide 36 cm.

908. Hallar el volumen de un cono equilátero, o sea de generatriz igual al diámetro de la base, cuyo radio es 6 cm.

909. Hallar el volumen de un cono de revolución cuya generatriz mide 15 m. y el radio de su base 9 m.

910. Calcular el volumen de un cono de revolución, de generatriz 2'6 dm. y altura 24 cm.

911. Calcular el volumen de los cuerpos que se engendran al hacer girar un triángulo rectángulo sucesivamente alrededor de cada uno de sus lados; las medidas de éstos son: $a = 5$ dm., $b = 4$ dm. y $c = 3$ dm.

912. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira 360° alrededor de su hipotenusa, si ésta mide 25 cm. y la proyección del cateto mayor sobre ella es de 16 cm.

913. El volumen de un cono es $108\,\pi$ dm^3 y su altura 4 dm. ¿Cuál es su área total?

914. El desarrollo de un cono es un sector circular de 8 cm. de radio y 90° de amplitud. Hallar el volumen del cono a que pertenece.

915. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por un triángulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ cm^2, al girar alrededor de una de sus alturas.

916. Un cono de revolución tiene como altura la raíz menor de la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, y como generatriz la raíz mayor de esa misma ecuación. Calcular su área total y su volumen. (Las raíces se expresan en metros).

917. Un cilindro y un cono tienen el mismo volumen y la misma altura. El diámetro del cono es $\sqrt{12}$. ¿Cuál será el radio del cilindro?

918. La altura de un tronco de pirámide cuadrangular regular mide 4 cm. y los lados de las bases miden 10 cm. y 4 cm. Calcular el área lateral, la total y el volumen.

919. Una artesa tiene forma de tronco de pirámide de bases rectangulares. El largo y ancho de la base mayor miden, respectivamente, 1'90 m. y 90 cm. En la base menor, esas mismas dimensiones miden 1'70 m. y 75 cm. La altura mide 60 cm. Calcular el volumen de la artesa.

920. Los radios de las bases de un tronco de cono de revolución miden 7 cm. y 15 cm., y la altura del tronco es la media aritmética de los radios de las bases. Calcular el volumen del tronco.

921. ¿Cuántos gramos pesa el agua que puede contener el tronco de cono que tiene por bases círculos de radios 2 dm. y 40 cm., siendo la altura la semisuma de estos radios. ($\pi = 3'14$).

922. Las bases de un trapecio isósceles miden 8'20 m. y 7'40 m., y su área es de 93'6 m^2. Calcular la altura y el volumen del cuerpo engendrado al girar el trapecio alrededor de la recta que une los puntos medios de las bases.

28. Volúmenes de figuras esféricas

155. **Proceso para hallar el volumen de cuerpos esféricos.** — En el camino que seguiremos para calcular el volumen de algunas figuras esféricas, recorreremos las siguientes etapas:

1) FUNDAMENTO. — Estudio del volumen del cuerpo engendrado por un triángulo que gira en torno a un eje coplanario, sobre el cual apoya un vértice.

2) PASO INTERMEDIO. — Cálculo del volumen engendrado por un sector poligonal regular al girar en torno a un eje coplanario que pasa por el centro.

3) LÍMITE. — Cálculo del volumen engendrado por un sector circular o por un semicírculo en giro, considerados ambos como sectores poligonales regulares de infinito número de lados.

156. **Volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un triángulo.** — Vamos a estudiar el volumen que engendra un triángulo al girar en torno a un eje coplanario que no le atraviesa y en el que apoya uno de los vértices. Consideraremos tres posiciones distintas del triángulo (figura 175).

1.ª POSICIÓN. — *El triángulo tiene un lado coincidente con el eje.* El volumen engendrado por el giro del triángulo ABC es igual a la suma del volumen engendrado por ABD, que es un cono, más el volumen engendrado por BCD, que es otro cono. Luego (152):

$$\text{Vol. eng. por } ABC = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot AD + \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot DC = \tfrac{1}{3}\pi r^2 (AD+DC) = \\ = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot AC = \tfrac{1}{3}\pi r \times r \cdot AC$$

El producto $r \cdot AC$ es igual al producto $h \cdot l$, ya que ambos expresan el duplo del área del triángulo ABC. Luego, sustituyendo, resulta:

$$\text{Vol. eng. por } ABC = \tfrac{1}{3}\pi r \times hl = \tfrac{1}{3}h \times \pi r l$$

Pero el factor $\pi r l$ representa el área lateral del cono que engendra ABD, es decir, el área de la superficie engendrada por l; luego,

$$\text{Vol. eng. por } ABC = \tfrac{1}{3}h \times \text{ár. eng. por } l$$

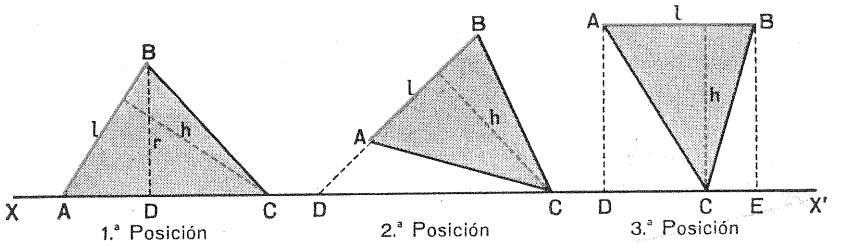


FIG. 175

2.ª POSICIÓN. — *El triángulo apoya un solo vértice en el eje y el lado opuesto es oblicuo al eje.* Aplicando lo que acabamos de deducir, tendremos:

$$\text{Vol. eng. por } ABC = \text{vol. eng. por } DBC - \text{vol. eng. por } DAC =$$
$$= \tfrac{1}{3}h \times \text{ár. eng. por } DB - \tfrac{1}{3}h \times \text{ár. eng. por } DA =$$
$$= \tfrac{1}{3}h \times \text{ár. eng. por } l$$

3.ª POSICIÓN. — *El triángulo apoya un solo vértice en el eje y el lado opuesto es paralelo al eje.* Se tiene:

$$\text{Vol. eng. por } ABC = \underset{\text{(cilindro)}}{\text{vol. eng. por } DABE} - \underset{\text{(cono)}}{\text{vol. eng. por } DAC} - \underset{\text{(cono)}}{\text{vol. eng. } EBC} =$$

$$= \pi h^2 l - \tfrac{1}{3}\pi h^2 \times DC - \tfrac{1}{3}\pi h^2 \times CE =$$
$$= \pi h^2 l - \tfrac{1}{3}\pi h^2 (DC+CE) = \pi h^2 l - \tfrac{1}{3}\pi h^2 l = \tfrac{2}{3}\pi h^2 l =$$
$$= \tfrac{1}{3}h \times 2\pi h \cdot l = \tfrac{1}{3}h \times \text{ár. eng. por } l$$

Vemos, por tanto, que en las tres posiciones se verifica lo siguiente:

> *El volumen engendrado por un triángulo al girar en torno a un eje coplanario que no le atraviesa y sobre el cual apoya un vértice, es igual al tercio de la altura correspondiente a dicho vértice, por el área engendrada por el lado opuesto.*

157. Volumen engendrado por un sector poligonal regular. — *Se llama sector poligonal regular a la porción de plano limitada por una línea poligonal regular y los radios que determinan sus extremos.*

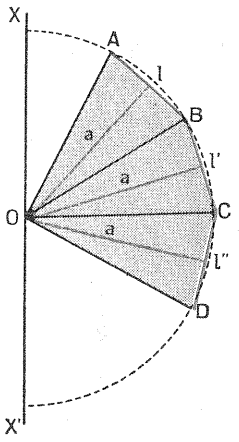


FIG. 176

Sea *OABCD* (fig. 175) un sector poligonal regular. Lo podemos considerar descompuesto por los radios en triángulos isósceles iguales, que tienen por altura la apotema de la línea poligonal y que designaremos por *a*. De la línea poligonal regular diremos que es la base del sector poligonal; la designamos por *p*.

Al girar alrededor de un eje *XX'* coplanario que pase por el centro *O sin atravesar al sector* (aunque sus radios extremos puedan confundirse con el eje), engendra un cuerpo cuyo volumen es la suma de los volúmenes de los cuerpos engendrados por los triángulos isósceles. Es decir, tendremos:

$$\text{Vol. eng. por el sector poligonal} =$$
$$= \tfrac{1}{3}a \times \text{ár. eng. por } l + \tfrac{1}{3}a \times \text{ár. eng. por } l' + \tfrac{1}{3}a \times \text{ár. eng. por } l'' =$$
$$= \tfrac{1}{3}a \times \text{ár. eng. por } (l + l' + l'') = \tfrac{1}{3}a \times \text{ár. eng. por } p$$

De aquí que digamos: *El volumen engendrado por un sector poligonal que gira en torno a un eje coplanario que pasa por el centro sin atravesarle, es igual al tercio de la apotema, por el área engendrada por la línea poligonal que sirve de base al sector.*

158. Volumen del sector esférico.— Si duplicamos una, dos, tres, ..., infinitas veces, el número de lados de la base de un sector poligonal regular, ¿cuál será el *límite* al que tiende el sector poligonal? ¿Y el de su apotema? Claramente se ve que el límite del sector poligonal es un sector circular; y el de su apotema, el radio de ese sector circular.

Ahora bien: ¿qué cuerpo engendra un sector circular cuando gira alrededor de un diámetro que no le atraviesa? Recordemos (fig. 158) que el cuerpo obtenido es un sector esférico. Luego, tendremos:

$$\text{Vol. sec. esf.} = \tfrac{1}{3}r \times \text{ár. eng. por arco-base} = \tfrac{1}{3}r \times \text{ár. zona o casq.}$$

El volumen de un sector esférico es igual al tercio del producto del área de la zona o del casquete que le sirve de base, por la longitud del radio.

Como el área de la zona o del casquete viene expresada por $2\pi r h$, el volumen V del sector esférico será

$$V = \tfrac{1}{3} r \times 2\pi r h = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h$$

159. **Volumen de la esfera.**— Puede considerarse a la esfera como un sector esférico al que corresponde una zona igual a toda la superficie esférica. Por consiguiente, si el radio de la esfera es r, tendremos que el volumen V de ésta será

$$V = \frac{1}{3} r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Es decir: *El volumen de la esfera es igual al tercio del producto del área de la superficie esférica por el radio, o lo que es lo mismo, a cuatro tercios del producto de π por el cubo del radio.*

160. **Volumen de la cuña esférica.**— Razonando de modo análogo a como se hizo al hallar el área del huso esférico, admitiremos la proporcionalidad entre los volúmenes de las cuñas esféricas y los diedros correspondientes, en una misma esfera.

Establecido esto, diremos: La esfera puede ser considerada como una cuña de 360° y su volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$; luego, una cuña de 1° tendrá por volumen

$$\frac{4\pi r^3}{3 \times 360} = \frac{\pi r^3}{270}$$

y el volumen V de una cuña de $n°$ de amplitud será

$$V = \frac{\pi r^3 n}{270}$$

161. OBSERVACIÓN.— Hay fórmulas que expresan el volumen del segmento esférico de una o dos bases, pero nosotros prescindiremos por ahora de su estudio.

EJERCICIOS

923. Hallar el volumen, en dm^3, de un sector esférico perteneciente a una esfera de 50 cm. de radio. La altura de la zona correspondiente al sector mide 15 cm. ($\pi = 3'14$).

924. Hallar el volumen de un sector esférico cuyo casquete tiene 6 m^2 de área, sabiendo que pertenece a una esfera de superficie igual a $8\,\pi$ m^2.

925. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por un sector circular al girar 360° alrededor de un eje coplanario y perpendicular a la bisectriz del ángulo en el centro del sector. Ángulo del sector, 60°; radio, 0'8 m.; $\pi = 3'14$.

926. Calcular la altura y el diámetro de un cilindro, sabiendo que su volumen es igual al de una esfera de radio 9 cm. y que su área lateral es igual a la de un círculo de radio 18 cm.

927. Calcular el volumen de una caldera compuesta de un cilindro de 65 cm. de radio y 1'2 m. de altura, terminada en su parte inferior por un hemisferio del mismo diámetro que el cilindro.

928. El número que mide el volumen de una esfera en cm^3 es igual al número que mide su área expresada en dm^2. ¿Cuál es el radio de dicha esfera y cuál su volumen?

929. Hallar el volumen de una esfera, sabiendo que uno de sus círculos máximos tiene por área 12'5664 m^2.

930. Una esfera tiene la misma área total que un cubo de 4 m. de arista. Calcular el radio de la esfera y su volumen.

931. Calcular el peso de una esfera hueca de radio interior 2 cm., espesor 5 mm. y peso específico de la sustancia de que está construida 7'5.

932. Se tienen dos esferas iguales, tangentes exteriores, de diámetro 8 dm. Se traza la esfera tangente a las dadas, de diámetro 1'6 m. Calcular el volumen del recinto exterior a las dos primeras e interior a la tercera.

933. Hallar el volumen de una esfera circunscrita a un cubo de 1 dm. de arista.

934. Calcular el volumen de una esfera en la que sus circunferencias máximas miden 30 m. de longitud.

935. Se tiene un cubo de 12 cm. de arista circunscrito a una esfera. Calcular el volumen del cubo, el volumen de la esfera y el volumen comprendido entre ambos.

936. Un cubo tiene de diagonal $12\sqrt{3}$ m. Calcular el volumen de la esfera tangente a sus caras.

937. La superficie de una esfera es 12'56 m^2. Calcular su volumen.

938. Una esfera de radio 5 m. se corta por un plano que dista del centro de la misma 3 m. Calcular el radio de la circunferencia sección y el volumen de la esfera.

939. Calcular el peso del aire que desplaza un globo esférico de 2'4 m. de diámetro, sabiendo que el peso de un litro de aire es 1'3 gramos.

940. Calcular el volumen de una cuña esférica de 39° en una esfera de radio 3 m.

941. El diámetro de una naranja pelada, supuesta esférica, es 6 cm., y se compone de 16 gajos iguales. Calcular el volumen de un gajo y su superficie total.

942. Calcular el volumen de una cuña esférica, siendo su ángulo de 18° y su área total de 3'768 m^2. ($\pi = 3'14$).

943. En una esfera de 15 cm. de radio, una cuña tiene 314 cm^3 de volumen. ¿Cuántos grados tiene la cuña?

29. Secciones cónicas

162. Secciones planas de una superficie cónica. — Un plano que no pase por el vértice puede cortar a una superficie cónica de revolución (figura 177):

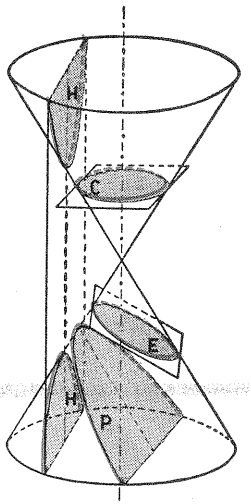


FIG. 177

1.° *Perpendicularmente al eje,* y la sección producida es una circunferencia (*C* en la fig.).

2.° *Oblicuamente al eje, cortando a todas las generatrices.* La sección producida es una curva cerrada que se llama *elipse* (*E* en la fig.).

3.° *Oblicuamente al eje, siendo paralelo a una generatriz.* La sección que se produce es una curva abierta llamada *parábola* (*P* en la fig.).

4.° *Oblicua o paralelamente al eje, siendo el plano paralelo a dos generatrices y cortando a las dos hojas de la superficie cónica.* En este caso, la sección producida es una curva abierta que consta de dos *ramas,* denominada *hipérbola* (*H-H* en la fig.).

163. Las tres cónicas. — Con la denominación de *cónicas* se designa a tres especies de curvas: *elipse, hipérbola* y *parábola,* de aspecto distinto.

La elipse, que como caso particular comprende a la circunferencia, es cerrada y tiene todos sus puntos a distancia finita. Las otras dos son abiertas y se prolongan hacia el infinito. Además, la hipérbola presenta dos *ramas* separadas. Estas curvas constituyen, a pesar de su distinto aspecto, una misma familia. Su unidad se pone de manifiesto en cada uno de los puntos de vista desde los cuales se las puede considerar, y en particular si se tiene en cuenta su generación. Esta cualidad fue la primera que se observó, y de ella deriva la razón del nombre dado a este grupo de curvas.

164. ELIPSE: Definiciones. — *Elipse es una curva cerrada y plana, lugar geométrico de los puntos de un plano, cuyas distancias a dos fijos, sumadas, dan una longitud constante* (fig. 178).

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos.*

Los segmentos que unen cualquier punto de la curva con los focos, se denominan *radios vectores;* v. gr.: $F'M$ y FM.

El segmento AA' que pasa por los focos y tiene sus extremos en la curva, se llama *eje principal* o *eje mayor,* y se designa por $2a$.

El segmento BB', mediatriz del segmento $F'F$ y cuyos extremos están en la curva, se denomina *eje secundario* o *eje menor.* Se designa por $2b$.

La distancia $F'F$ entre los focos, se llama *distancia focal,* y se designa por $2c$.

La razón $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad,* y varía entre 0 y 1. La excentricidad representa la mayor o menor abertura de la elipse. Si la excentricidad es cero resulta una circunferencia, y si es 1 da un segmento rectilíneo.

Los puntos A, A', B y B' en que los ejes cortan a la curva se llaman *vértices* de la elipse.

El punto O, intersección de los ejes, es el *centro* de la elipse.

165. Construcción. — Puede efectuarse por *trazo continuo* o por *puntos,* cuando se conocen los focos y el eje mayor $2a$.

1) Para construir la elipse por *trazo continuo,* se toma un hilo de longitud igual a $2a$, se fijan sus extremos en los focos F' y F, y, por medio de un lápiz o punzón, se mantiene el hilo tirante y se describe la curva (fig. 178).

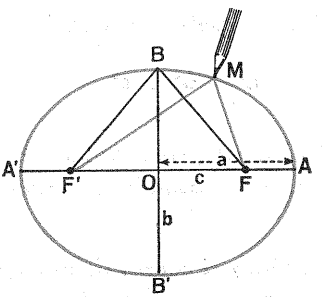


FIG. 178

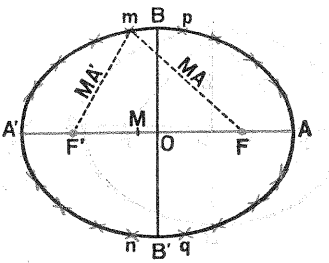


FIG. 179

2) Para construir la elipse por *puntos*, se traza primero el eje mayor $A'A$ (fig. 179) y se marcan en él el centro O y los focos F' y F; luego, con la longitud $OA = a$ y haciendo centro en F' y F se determinan con un compás los puntos B y B'. Se toma después un punto cualquiera M entre el centro O y uno de los focos, y con radios sucesivamente iguales a MA y MA', cuya suma es igual a $2a$, se trazan arcos desde cada foco que, al cortarse, dan cuatro puntos de la curva: m, n, p, q.

Variando la posición del punto M entre F' y O, se pueden obtener tantos puntos de la curva como se quieran. Uniendo estos puntos con un trazo continuo, resulta la elipse representada en la figura 179.

166. Propiedades. — 1.ª *La suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la elipse es igual a* 2 a.

En efecto: según la construcción por puntos, se tiene (fig. 179):

$$F'm + Fm = MA' + MA = AA' = 2a$$

2.ª *Los radios vectores de los extremos del eje menor son iguales al semieje mayor.* Esta propiedad se deduce de la misma construcción por puntos. En efecto (fig. 180):

$$F'B = FB = a$$

3.ª *El semieje mayor* a *es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el semieje menor* b *y la semidistancia focal* c, como se ve claramente en el triángulo rectángulo $F'OB$ (fig. 180).

Es decir: se verifica la relación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

que permite calcular uno cualquiera de los elementos a, b, c, cuando se conocen los otros dos.

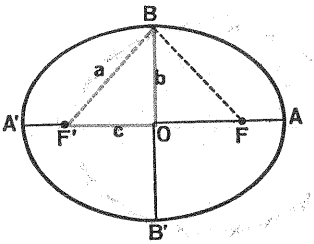


FIG. 180

4.ª *Los ejes y el centro de la elipse son respectivamente ejes y centro de simetría de la curva,* como sería fácil demostrar.

167. HIPÉRBOLA: Definiciones. — *Hipérbola es una curva abierta y plana que consta de dos ramas, y es el lugar geométrico de los tos de un plano, cuyas distancias a dos fijos, restadas, dan una longitud constante* (fig. 181).

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos*.

Los segmentos que unen un punto cualquiera de la curva con los focos, se denominan *radios vectores*; v. gr.: $F'M$ y FM.

La recta $A'A$ determinada por los focos y limitada por la curva se llama *eje real* o *eje focal*, y se designa por $2a$.

La recta BB', perpendicular a $A'A$ en su punto medio, se denomina *eje imaginario* o *eje no focal*, y se designa por $2b$.

La distancia $F'F$ entre los focos se llama *distancia focal*, y se designa por $2c$.

La razón $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad*; es siempre mayor que 1.

Los puntos A' y A son los *vértices* de la hipérbola.

El punto O, intersección de los ejes, es el *centro* de la hipérbola.

168. Construcción. — Puede hacerse por *trazo continuo* o por *puntos*, cuando se conocen los focos y el eje real $2a$.

1) Para construir la hipérbola por *trazo continuo*, se toma una regla y un hilo de longitud igual a la de la regla, menos $2a$ (fig. 181). Se fija un extremo del hilo en uno de los focos F, y el otro, en el extremo C de la regla. Después se sujeta el otro extremo de la regla en el foco F', y se la hace girar alrededor de él. Al mismo tiempo se describe la curva por medio de un lápiz o punzón apoyado en la regla, cuidando de mantener el hilo bien tirante. La curva así descrita es una rama de la hipérbola, pues se verifica siempre que

$$F'M - FM = 2a$$

La segunda rama de la curva se traza del mismo modo, después de invertir los papeles de los focos.

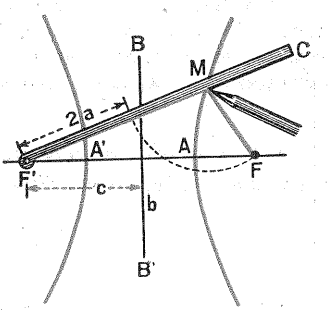


FIG. 181

2) Para construir la hipérbola por *puntos*, se traza primero el eje real $A'A = 2a$ (fig. 182) y se señalan los fo-

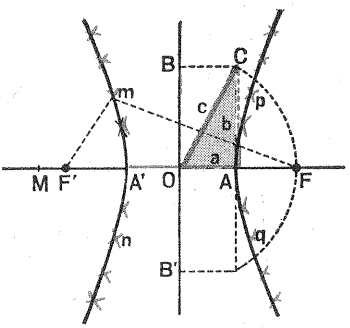


FIG. 182

cos F' y F. Se toma luego un punto cualquiera M situado sobre el eje real, a izquierda de F' o a derecha de F, y con radios sucesivamente iguales a MA' y MA, cuya diferencia es igual a $2a$, se trazan desde cada uno de los focos, arcos que, al cortarse, determinan cuatro puntos de la curva: m, n, p y q.

Variando la posición del punto M (de modo que permanezca siempre a izquierda de F' o a derecha de F), se pueden obtener cuantos puntos de la curva se deseen. Uniendo estos puntos con un trazo continuo, resulta la hipérbola representada en la figura 182.

169. Propiedades. — 1.ª *La diferencia de los radios vectores de un punto cualquiera de la hipérbola es igual a* 2 a (fig. 182).

En efecto: según la construcción por puntos, se tiene:

$$Fm - F'm = MA - MA' = 2a$$

2.ª *En la hipérbola, el eje no focal no corta a la curva, porque sus puntos tienen diferencia nula para sus distancias a los focos.* Por analogía con lo que hemos dicho de la elipse, se conviene en atribuirle una longitud $2b$, tal que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Para determinar la longitud b se construye un triángulo rectángulo OAC (figura 182) cuya hipotenusa es la semidistancia focal c, y uno de sus catetos, el semieje real a; el otro cateto AC será igual a b. Por tanto, el eje BB' se obtendrá llevando esta longitud a ambos lados de O.

3.ª *Cuando los dos ejes son iguales, la hipérbola se llama equilátera.* Para ella, se verifica

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{de donde} \quad c = a\sqrt{2}$$

4.ª *Los ejes y el centro de la hipérbola son respectivamente ejes y centro de simetría de la curva.*

170. PARÁBOLA: Definiciones. — *Parábola es una curva abierta y plana, lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto y una recta, fijos en el plano* (fig. 183).

El punto fijo F se denomina *foco* de la parábola, y la recta fija DD', *directriz*.

El segmento que une un punto de la parábola con el foco se llama *radio vector*; v. gr.: MF.

La perpendicular FD a la directriz, trazada por el foco, es el *eje* de la parábola.

El punto A, en que el eje corta a la curva, se llama *vértice* de la parábola.

El segmento de eje comprendido entre el foco y la directriz se denomina *parámetro* y se representa por p, es decir, $p = DF$.

171. Construcción. — Puede efectuarse por *trazo continuo* o por *puntos*, cuando se conoce el foco y la directriz.

1) Para la construcción de la parábola por *trazo continuo* nos servimos de una regla, una escuadra y un hilo de longitud igual al cateto mayor de la escuadra (fig. 183).

Se traza en primer lugar una recta DD', que ha de servir de directriz, y un punto F, que será el foco. Se fija luego un extremo del hilo en el vértice E de la escuadra, y el otro en el punto F elegido para foco. Se hace después que el borde de la regla coincida con la directriz y que el cateto menor de la escuadra se apoye en la regla.

Con un lápiz se pone tenso el hilo, de manera que el lápiz toque siempre el borde de la escuadra, y al mismo tiempo se hace que ésta resbale sobre la regla, con lo que el lápiz irá describiendo la curva. Ésta será una parábola, puesto que cualquiera de sus puntos, el M por ejemplo, está a igual distancia de F y de la recta DD', distancia que es igual a la diferencia entre la longitud del cateto mayor de la escuadra y la parte de hilo ME que coincide con él.

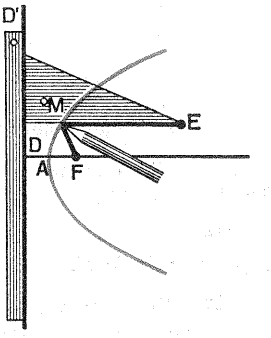


FIG. 183

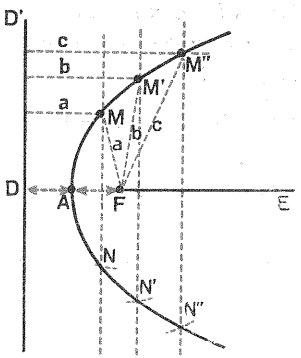


FIG 184

2) Para construir la parábola por *puntos*, se traza primero el eje *DE* perpendicular a la directriz y pasando por el foco *F*, que suponemos conocido (fig. 184). Se fija el vértice *A* en el punto medio de *DF*. Se trazan luego a derecha de *A* diversas paralelas a la directriz, y con un compás se toman las distancias de las paralelas a la directriz; distancias *a*, *b*, *c*, ... Con estas distancias como radio y haciendo centro en el foco *F*, se cortan por medio de arcos las respectivas paralelas. Obtendremos así los puntos *M*, *M'*, *M''*, ..., que son puntos de la parábola, puesto que equidistan del foco y de la directriz. Bastará luego unir todos esos puntos con un trazo continuo para obtener la parábola.

172. Elementos de simetría de la parábola — De la construcción de la parábola por puntos se deduce que *el eje de la parábola es eje de simetría de la curva.*

CUESTIONES Y EJERCICIOS

944. Construir una elipse por puntos, sabiendo que el eje mayor $AA' = 35$ mm. y la distancia focal $FF' = 24$ mm.

945. ¿Cómo se puede trazar una elipse dados sus dos ejes?

946. El eje mayor de una elipse mide 13 cm. y el eje menor 5 cm. Calcular la distancia focal y la excentricidad de la elipse.

947. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano, que unidos con los extremos de un segmento determinan un triángulo de perímetro constante? Aclarar la respuesta por medio del dibujo.

948. El eje menor de una elipse mide 8 cm., y la distancia focal 6 cm. Calcular el eje mayor y la excentricidad de la elipse.

949. En una elipse, $a + c = 6$ cm. y $a - c = 12$ mm. Calcular los dos ejes y la distancia focal.

950. El eje menor de una elipse mide 6 cm., la distancia focal 45 mm., y un radio vector de un punto de la curva 4 cm. Hallar el otro radio vector de ese punto.

951. ¿Qué figura se obtiene si los dos focos de la elipse coinciden con su centro? Explicar la contestación.

952. ¿Cuál es la excentricidad de una circunferencia y de un segmento rectilíneo, considerados ambos como elipses?

953. Construir una elipse, conocidos los focos y un punto de la curva.

954. ¿Cómo se construye una hipérbola, conocida la distancia focal y el eje real?

955. La distancia focal de una hipérbola mide 17 cm., y el eje real 8 cm. Hallar la longitud del eje imaginario y la excentricidad de la hipérbola.

956. El eje real de una hipérbola mide 8 cm., y la excentricidad es 3. Hallar la distancia focal.

957. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano, que unidos con los extremos de un segmento determinan un triángulo en el que la diferencia de los otros dos lados, distintos del segmento conocido, es constante? Aclarar la respuesta por medio del dibujo.

958. Conocidos el eje real y la longitud del eje imaginario, hallar geométricamente los focos de la hipérbola.

959. ¿Por qué la hipérbola tiene sólo dos vértices?

960. ¿Cómo se construye una parábola por puntos, conocido el parámetro, el eje y el foco?

961. Conocidos dos puntos M y N de una parábola y el foco F, determinar el vértice y la directriz.

962. Dados dos puntos y la directriz de una parábola, hallar el foco.

963. Hallar los puntos en que una paralela a la directriz, que se nos da, corta a una parábola cuya directriz y foco se conocen.

30. Movimiento de la Tierra

173. Esfera celeste. — Si observamos el cielo, en una noche serena, se nos muestra como una gran bóveda esférica cuyo centro está ocupado por el observador. Las estrellas semejan luces que se deslizan, de Este a Oeste, sobre la superficie de esta gran esfera recorriendo trayectorias circulares, cuyos planos son paralelos entre sí y perpendiculares al eje del mundo (fig. 185).

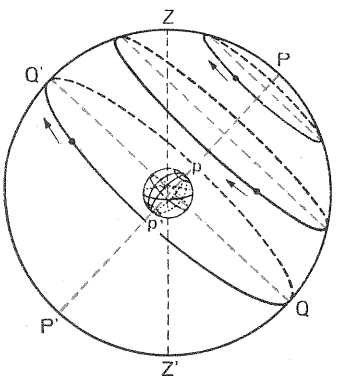


FIG. 185

Cada astro, aparentemente, da una vuelta completa por día, en realidad cada 23 horas 56 minutos del tiempo marcado por nuestros relojes.

La distancia a que se encuentran los astros no es apreciada por nuestros sentidos. Tan sólo nos damos cuenta que se hallan a distancias mayores que las terrestres, y en apariencia todos distan igual de nosotros. Por eso definimos la *esfera celeste* diciendo que *es una esfera de radio indeterminado, pero muy grande, cuyo centro es el de la Tierra, o el observador, y en cuya superficie se consideran proyectados todos los cuerpos celestes.*

En esta esfera (fig. 186) se distinguen, lo mismo que en la Tierra, los siguientes elementos que vamos a definir:

Eje del mundo PP' es el diámetro celeste que contiene al eje terrestre. Sus extremos son los polos: el que está sobre el horizonte *polo Norte*, y el opuesto a éste *polo Sur*.

Ecuador celeste QQ' es el círculo máximo cuyo plano es perpendicular al eje del mundo. Divide a la esfera en dos hemisferios que reciben el nombre del polo que contienen.

Paralelos celestes son círculos menores, como *MAN*, cuyos planos son paralelos al ecuador.

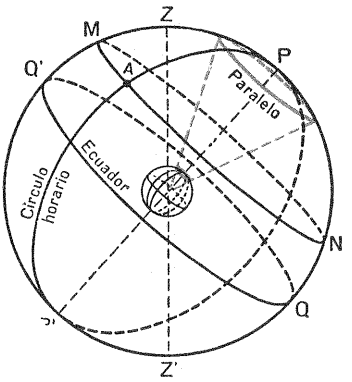


FIG. 186

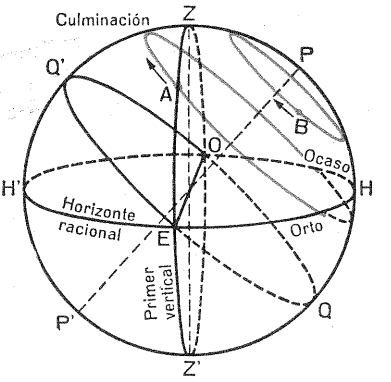


FIG. 187

Círculos horarios son círculos máximos, como *PAP'*, que pasan por los polos y corresponden a los meridianos geográficos, pues sus planos coinciden. Los planos del ecuador celeste y terrestre también coinciden. En cambio, un paralelo de la esfera celeste y su correspondiente de la Tierra se encuentran sobre la superficie de un cono recto cuyo vértice está en el centro de la esfera y cuya base coincide con el paralelo celeste (figura 186).

Vertical de un lugar es la línea *ZZ'* que coincide con la dirección de la plomada, pasa por el centro de la Tierra y encuentra a la esfera celeste en los puntos llamados *cenit Z*, visible al observador, y *nadir Z'*, el diametralmente opuesto.

Horizonte sensible es la línea que limita la superficie de la Tierra a que alcanza la vista del observador y en la cual parecen juntarse el cielo y la tierra.

Horizonte celeste HEH' (fig. 187) es el círculo máximo de la esfera celeste equidistante del cenit y nadir.

El plano del horizonte celeste y el del ecuador se cortan según la línea *EO*, siendo *E* el *Este* u *Oriente*, y *O* el *Oeste* u *Occidente*.

Círculo vertical de un lugar es todo círculo máximo que pasa por el cenit y nadir de ese lugar. El vertical que pasa por los puntos Este y Oeste se llama *primer vertical* (fig. 187).

174. Descripción del movimiento diurno. — No es admisible el movimiento de las estrellas alrededor del eje del mundo, pues, por el alejamiento de algunas de ellas, para dar una vuelta, en un día, sería

necesario que tuvieran una velocidad miles de veces mayor que la de la luz, cosa que no parece posible. Por otra parte, esas velocidades fantásticas desarrollarían fuerzas centrífugas que deberían ser neutralizadas con fuerzas de atracción que no existen.

El físico Foucault (*) demostró experimentalmente, en 1851, la rotación de la Tierra.

Así, pues, la causa del movimiento aparente de las estrellas, de Este a Oeste, es el movimiento de rotación de la Tierra, de Oeste a Este, dando un giro completo en un día. A este movimiento se le llama *movimiento diurno*.

Muchos astros, como el *A* (fig. 187), aparecen en el horizonte sensible (orto), se elevan a cierta altura (culminan), y luégo desaparecen (ocaso). Otros, como el *B*, no se ponen nunca y se llaman circumpolares.

Consecuencias. — El movimiento diurno de la Tierra produce la sucesión de los días y las noches y es causa de la diferencia de hora en la superficie terrestre.

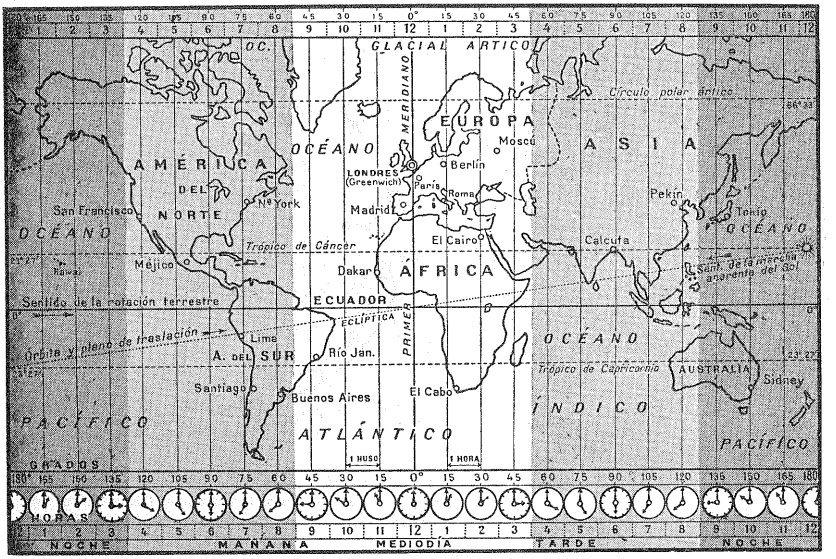
Decimos que es mediodía, o que son las 12 de nuestros relojes, cuando el Sol, en su movimiento aparente, pasa por el meridiano del lugar de que se trata. De esto se deduce que los puntos de la Tierra, situados sobre el mismo semimeridiano, limitado por el eje, tienen su hora, que llamamos *hora local*. La llamada *hora nacional* suele ser la de la capital en países no muy extensos. En la figura 188 representamos el globo terrestre dividido en 24 husos de 15° cada uno; el primero está comprendido entre 7° 30′ longitud Este de Greenwich y 7° 30′ longitud Oeste. El conjunto forma los llamados *husos horarios*, en cada uno de los cuales rige una hora única.

En todo lugar de la Tierra, el momento que señala el cambio de fecha es aquel en que el Sol culmina el antemeridiano del lugar.

175. Coordenadas horizontales. — En general, se llaman *coordenadas* los elementos que sirven para determinar la posición de un punto en el espacio; estas coordenadas pueden ser ángulos y arcos. Cuando se aplica a la determinación de un astro en la esfera celeste, reciben el nombre de *coordenadas celestes*.

El AZIMUT *y la* ALTURA *son las coordenadas celestes de un astro con respecto al horizonte.*

(*) León FOUCAULT (1819-1868), físico francés.



Los 24 husos horarios; (cada 15 grados=1 huso o 1 hora)
FIG. 188

Azimut de un astro es el ángulo diedro que forma el círculo vertical del lugar con el del astro cuya situación queremos determinar. Se mide en el horizonte de 0° a 360° en sentido Sur-Oeste-Norte-Este (fig. 189).

Altura de un astro es su distancia al horizonte, medida en arco de círculo vertical.

Distancia cenital de un astro es el arco de círculo vertical comprendido entre el astro y el cenit. La altura y la distancia cenital son, por consiguiente, complementarias, es decir, su suma es igual a 90°.

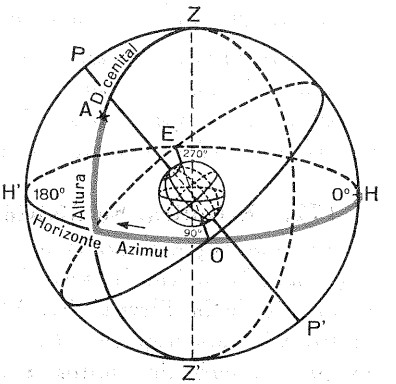


FIG. 189

176. Coordenadas ecuatoriales. — Las coordenadas horizontales dependen del lugar de observación, porque el horizonte, a quien se refieren, cambia de un punto a otro de la Tierra. Conviene elegir elementos de referencia fijos para que los astros tengan unas coordenadas constantes, independientes del lugar en que se tomen.

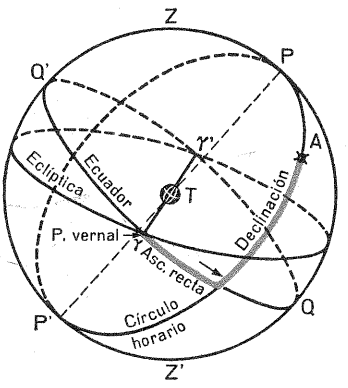


FIG. 190

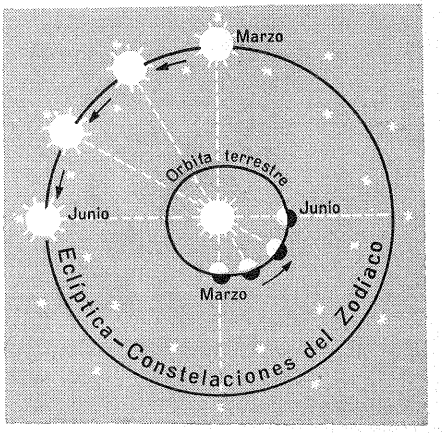


FIG. 191. — Si, por el Poniente, observamos el horizonte a la puesta del Sol, veremos al cabo de un año, una cada mes, las 12 constelaciones del Zodíaco.

Cuando la posición de un astro viene referida al ecuador celeste, que es un elemento fijo, las dos coordenadas que le determinan se llaman *declinación* y *ascensión recta.*

Declinación de un astro es la distancia del mismo al ecuador celeste medida en arco del *círculo horario* que pasa por el astro (fig. 190).

Círculos de declinación o *círculos horarios* son los círculos máximos que pasan por los polos.

La declinación se cuenta de 0° a ±90°, según esté el astro en el hemisferio Norte o en el hemisferio Sur, y se llama, respectivamente, declinación boreal y declinación austral.

Ascensión recta de un astro es el ángulo diedro que forma el círculo horario del *punto vernal,* punto del que hablaremos más adelante, con el del astro. Se mide sobre el ecuador de 0° a 360° a partir del *punto vernal,* en sentido contrario a las agujas de un reloj.

177. Eclíptica. Su división. — Supongamos una esfera celeste en la que están representadas las estrellas. Si señalamos en ella, diariamente y a una hora fija, la posición del Sol, resultante de la proyección del mismo desde la Tierra (fig. 191), observamos que se retrasa cada día cuatro minutos respecto al movimiento de las estrellas. Y, al cabo de un año, la serie de puntos señalados describe un círculo máximo que llamamos ECLÍPTICA.

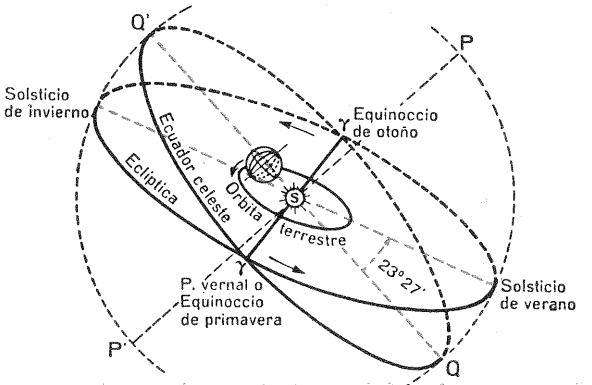


FIG. 192

Eclíptica es, pues, la trayectoria aparente del Sol entre las estrellas; o bien, la intersección (círculo máximo) del plano que contiene la órbita terrestre con la esfera celeste (fig. 192).

La eclíptica y el ecuador tienen dos puntos comunes, γ y γ', llamados puntos equinocciales: γ es el *punto vernal* o equinoccio de primavera. Por él pasa el Sol, del hemisferio Sur al hemisferio Norte, en su recorrido por la eclíptica. γ' es el equinoccio de otoño y por él pasa el Sol del hemisferio Norte al hemisferio Sur.

Zodíaco es la zona celeste de 8° a 10° a cada lado de la eclíptica que comprende las 12 constelaciones que recorre el Sol en su curso anual aparente. Los nombres de estas constelaciones son: Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpión, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis (fig. 191).

178. Descripción del movimiento anuo. — Ya hemos dicho que el movimiento anual del Sol por la eclíptica es sólo aparente. Los fenómenos celestes y terrestres se explican lo mismo suponiendo al Sol fijo y la Tierra móvil. Pero es natural que suceda esto último, puesto que, siendo el Sol 1 300 000 veces mayor que la Tierra, lo contrario está en contra de las leyes de la Mecánica.

Así, pues, podemos asegurar que la Tierra está sometida a un movimiento de traslación alrededor del Sol, regulado por las leyes de la gravitación universal (*). La órbita recorrida es una elipse que se

(*) «Todos los cuerpos se atraen en razón directa de sus masas y en razón inversa del cuadrado de sus distancias».

puede representar por una circunferencia, ya que su excentricidad $\left(e = \frac{c}{a} = \frac{1}{60}\right)$ es muy pequeña. El Sol ocupa uno de los focos de esa elipse. El eje mayor se llama línea apsidial o línea de los ápsides (**). Cuando la Tierra se halla en uno de sus extremos, entonces se encuentra más cerca del Sol (perihelio) o más alejada (afelio).

La órbita terrestre está contenida, naturalmente, en el plano de la eclíptica y este plano y el del ecuador forman un ángulo de 23° 27′. La intersección de ambos planos es la línea de los equinoccios (fig. 192). Esta línea conserva una dirección constante: de ahí que el *punto vernal*, que sirve de origen para medir la ascensión recta, sea un punto fijo.

179. Consecuencias del movimiento de traslación: I. DESIGUALDAD DE LOS DÍAS Y LAS NOCHES. — Si el eje de los polos fuera perpendicular a la órbita terrestre, como además del movimiento de traslación tiene nuestro planeta el movimiento de rotación (símil de la peonza: al mismo tiempo que gira sobre sí misma describe un círculo), sucedería que cada punto de la Tierra ocuparía todos los días la misma posición con respecto al Sol: a la misma hora, el Sol estaría en el mismo lugar del cielo, y los días y las noches serían de 12 horas siempre y en todas partes. Todos los días del año se asemejarían y no existirían las estaciones. En realidad *el eje de la Tierra está inclinado* con respecto al plano de la eclíptica. Esta inclinación es constante y se mantiene siempre en la misma dirección (fig. 193). Dicha inclinación explica la desigualdad de los días y las noches.

Dos días solamente durante el año, alrededor del 21 de marzo y del 23 de septiembre, el día y la noche tienen igual duración. Los habitantes del ecuador tienen, a mediodía, el Sol justamente encima de sus cabezas: se dice que el Sol pasa por el *cenit*. Para las demás regiones, los días y las noches son iguales, pero los rayos solares llegan oblicuamente al suelo. A medida que nos acercamos a los polos, a mediodía, el Sol está cada vez más bajo sobre el horizonte.

En los polos, los rayos solares llegan rasando el suelo, y estas regiones permanecen sumidas en una penumbra intermedia entre la claridad del día y la oscuridad de la noche. La circunferencia que limita la zona del día y de la noche pasa por los polos y corta a todos los paralelos en dos partes iguales. Toda la Tierra tiene entonces 12 horas de día y 12 de noche. Estos momentos del año se denominan *equinoccios* (del latín

(**) En Astronomía, se denomina *ápside* (o ábside) cada uno de los extremos del eje mayor de la órbita de un astro.

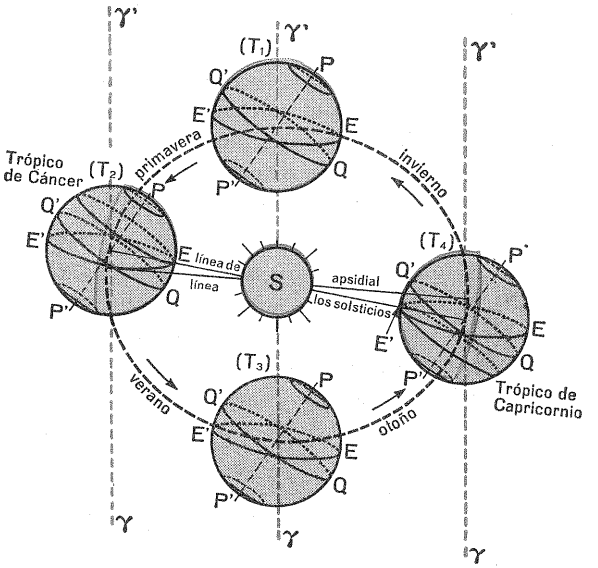


FIG. 193.

El círculo máximo que en cualquier instante limita la parte iluminada de la Tierra y la parte oscura, se llama *círculo de iluminación*. — El *círculo de iluminación* divide siempre al *ecuador* en dos partes iguales, por ser un círculo máximo; de ahí resulta que siempre la *mitad del ecuador* está iluminada y la otra mitad tiene noche; por consiguiente, allí los días y las noches son siempre iguales. — En los demás puntos de la Tierra, los días y las noches son iguales cuando el círculo de iluminación coincide con un meridiano y divide, por tanto, a los paralelos en dos partes iguales, lo cual no sucede más que dos veces al año, en los equinoccios. En los demás días del año, los paralelos están cortados en partes desiguales por dicho círculo de iluminación y, por consiguiente, el día y la noche no pueden ser iguales. — Cuanto mayor es la distancia de un punto al ecuador, tanto más notable es también la diferencia entre los días y las noches. En los círculos polares el día o la noche llegan a ser de 24 horas. En los polos el día dura seis meses y a noche otro tanto, pero ésta se halla entrecortada por largos crepúsculos. (T_1), (T_2), (T_3) y (T_4) son las posiciones de la Tierra al principio de cada estación.

aequus = igual, *nox* = noche): *equinoccio de primavera*, hacia el 21 de marzo y *equinoccio de otoño*, hacia el 23 de septiembre (fig. 193).

Desde el equinoccio de primavera hasta las proximidades del 21 de junio, los días van creciendo con regularidad en varios minutos a costa de las noches. La trayectoria aparente del Sol parece aumentar: a mediodía, aunque manteniendo siempre la misma dirección, está cada vez más alto sobre el horizonte. El 21 de junio o *solsticio de verano* alcanza el día su mayor duración. En esta fecha, la Tierra parece inclinar el hemisferio boreal hacia el Sol. La inclinación del eje terrestre no ha variado, pero los rayos solares no llegan ya perpendicularmente al ecuador

sino a un paralelo situado a 23° 27′ de latitud Norte, llamado *Trópico de Cáncer*.

Este mismo día, los rayos solares llegan rasando el suelo a un punto del paralelo situado a 23° 27′ del polo Norte (o a 66° 33′ de latitud Norte); en él, aun a medianoche, permanece el Sol en el horizonte: es el Sol de medianoche. Al Norte de este paralelo, llamado *Círculo polar ártico*, todo el casquete polar gira sumergido en la luz solar y el día dura 24 horas.

Después del solsticio de junio, los días, en el hemisferio boreal, comienzan a disminuir lentamente al propio tiempo que las noches van creciendo. A mediodía, el Sol pasa por el cenit de un punto situado cada día más hacia el Sur, entre el Trópico de Cáncer y el ecuador. Este mismo fenómeno se continúa hasta el equinoccio de septiembre.

Desde el equinoccio de septiembre hasta las proximidades del 21 de diciembre, los días continúan disminuyendo y las noches siguen creciendo. El Sol, más bajo en el cielo, dibuja un trayecto más corto y las sombras van haciéndose cada vez más largas. El 21 de diciembre o *solsticio de invierno* resulta el día más corto del año. En esta fecha, la Tierra parece alejar su hemisferio Norte del Sol. La inclinación del eje terrestre no ha variado, pero nuestro globo presenta entonces el hemisferio Sur a la acción de los rayos solares, los cuales, a mediodía, llegan perpendiculares al paralelo situado a 23° 27′ de latitud Sur, llamado *Trópico de Capricornio*. En este instante se encuentra el Sol en el cenit del referido trópico.

El mismo día, los rayos solares llegan rasando el suelo a un punto del Círculo polar ártico; toda la zona polar situada al Norte de este círculo queda sumergida en la sombra y la noche dura allí 24 horas. Al contrario, toda la zona austral situada más allá del Círculo antártico (66° 33′ de latitud Sur), queda iluminada durante 24 horas y no existe allí noche. En el solsticio de diciembre, la situación de cada hemisferio se halla, por tanto, invertida respecto a la del solsticio de junio.

II. Estaciones del año. — Las estaciones no se explican por el alejamiento del Sol con respecto a la Tierra. Las diferencias de temperaturas durante el año se deben:

1.° *Al número de horas diarias de insolación.* El verano corresponde a los días más largos y el invierno a los días más cortos.

2.° *A la inclinación variable de los rayos solares.* Cuanto más perpendicularmente llegan a una región los rayos solares, más calientan.

En nuestras regiones templadas se distinguen cuatro estaciones limitadas por los equinoccios y los solsticios. Todas las regiones del globo no tienen las mismas estaciones en el mismo momento. Tampoco se dan en todas partes las diferencias entre la estación cálida y la estación fría. Ni existen diferencias sensibles con respecto a las estaciones intermedias primavera y otoño.

En el ecuador, el Sol pasa dos veces por el cenit durante el año: en el equinoccio del 21 de marzo y en el del 23 de septiembre. En los solsticios, los rayos solares son poco oblicuos y el Sol está siempre muy alto en el cielo; los días son siempre de 12 horas. El calor, por consiguiente, es allí grande durante todo el año, sin que se den diferencias notables entre las estaciones.

En la zona comprendida entre los dos trópicos, los rayos del Sol llegan verticalmente, cuando el Sol pasa por el cenit, o con poca inclinación. Además, la duración de los días varía poco. El calor, por tanto, es allí continuo y el enfriamiento poco señalado.

Por el contrario, en las regiones polares, el año se divide en dos estaciones. A partir del círculo polar, el día o la noche puede llegar a ser de 24 horas. El número de noches o de días completos aumenta del círculo polar al polo. En el polo Norte o en el polo Sur, seis meses de día suceden a seis meses de noche. Durante el día polar, el Sol no se pone, sino que describe, muy bajo, sobre el horizonte, una vasta curva cerrada; el calentamiento que produce es débil, debido a que sus rayos son muy oblicuos o rasantes al suelo: es el verano polar. Durante la noche polar, el Sol desaparece por debajo del horizonte y el frío es intenso: estamos en el invierno polar.

CUESTIONES Y EJERCICIOS

964. Un grado de longitud terrestre, ¿tiene la misma longitud lineal en todos los paralelos? ¿Cuál es su longitud en el paralelo 45°, suponiendo que éste tiene una longitud total de 28.381 Km.?

965. ¿Cuál es la diferencia de hora entre Madrid y Moscú? ¿Entre París y Nueva York?

966. ¿A qué hora oiremos en España la retransmisión de un acto que tenga lugar en Nueva York el lunes a las 16 horas?

967. ¿Qué día y a qué hora será conocido en Madrid, por radio, un acontecimiento que se está desarrollando en Tokío el jueves a las 4 de la mañana?

968. Desde el equinoccio de septiembre hasta el solsticio de diciembre, ¿en qué lugares de la Tierra los días son más cortos que las noches? ¿Cuál es la duración de los días y de las noches en el ecuador? Razonar la contestación.

969. Observando la figura 193, decir cuáles son los meses de verano en el hemisferio austral. ¿Y los meses de invierno? ¿En qué meses harán la recolección de cereales los agricultores en la Argentina?

970. En 365 días, la Tierra recorre la órbita terrestre, es decir, 930 millones de kilómetros. ¿Con qué velocidad se desplaza a la hora?

971. ¿En qué mes se hace en nuestras regiones la recolección del trigo?, ¿la vendimia?, ¿la siembra? ¿En qué meses se harán estos trabajos en Australia?

972. ¿Por qué las expediciones a la Antártida parten de nuestras regiones en diciembre?

973. ¿Por qué los lapones que viven en las regiones polares árticas celebran grandes fiestas al aproximarse el equinoccio de marzo?

CUADRADOS, CUBOS, RAÍCES

N.º	CUADRADOS	CUBOS	RAÍZ CUADR.	RAÍZ CÚBICA	N.º	CUADRADOS	CUBOS	RAÍZ CUADR.	RAÍZ CÚBICA
1	1	1	1'000	1'000	51	2.601	132.651	7'141	3'708
2	4	8	1'414	1'260	52	2.704	140.608	7'211	3'733
3	9	27	1'732	1'442	53	2.809	148.877	7'280	3'756
4	16	64	2'000	1'587	54	2.916	157.464	7'348	3'780
5	25	125	2'236	1'710	55	3.025	166.375	7'416	3'803
6	36	216	2'449	1'817	56	3.136	175.616	7'483	3'826
7	49	343	2'646	1'913	57	3.249	185.193	7'550	3'849
8	64	512	2'828	2'000	58	3.364	195.112	7'616	3'871
9	81	729	3'000	2'080	59	3.481	205.379	7'681	3'893
10	100	1.000	3'162	2'154	60	3.600	216.000	7'746	3'915
11	121	1.331	3'317	2'224	61	3.721	226.981	7'810	3'937
12	144	1.728	3'464	2'289	62	3.844	238.328	7'874	3'958
13	169	2.197	3'606	2'351	63	3.969	250.047	7'937	3'979
14	196	2.744	3'742	2'410	64	4.096	262.144	8'000	4'000
15	225	3.375	3'873	2'466	65	4.225	274.625	8'062	4'021
16	256	4.096	4'000	2'520	66	4.356	287.496	8'124	4'041
17	289	4.913	4'123	2'571	67	4.489	300.763	8'185	4'062
18	324	5.832	4'243	2'621	68	4.624	314.432	8'246	4'082
19	361	6.859	4'359	2'668	69	4.761	328.509	8'307	4'102
20	400	8.000	4'472	2'714	70	4.900	343.000	8'367	4'121
21	441	9.261	4'583	2'759	71	5.041	357.911	8'426	4'141
22	484	10.648	4'690	2'802	72	5.184	373.248	8'485	4'160
23	529	12.167	4'796	2'844	73	5.329	389.017	8'544	4.179
24	576	13.824	4'899	2'885	74	5.476	405.224	8'602	4'198
25	625	15.625	5'000	2'924	75	5.625	421.875	8'660	4'217
26	676	17.576	5'099	2'963	76	5.776	438.976	8'718	4'236
27	729	19.683	5'196	3'000	77	5.929	456.533	8'775	4'254
28	784	21.952	5'292	3'037	78	6.084	474.552	8'832	4'273
29	841	24.389	5'385	3'072	79	6.241	493.039	8'888	4'291
30	900	27.000	5'477	3'107	80	6.400	512.000	8'944	4'309
31	961	29.791	5'568	3'141	81	6.561	531.441	9'000	4'327
32	1.024	32.768	5'657	3'175	82	6.724	551.368	9'055	4'344
33	1.089	35.937	5'745	3'208	83	6.889	571.787	9'110	4'362
34	1.156	39.304	5'831	3'240	84	7.056	592.704	9'165	4'380
35	1.225	42.875	5'916	3'271	85	7.225	614.125	9'220	4'397
36	1.296	46.656	6'000	3'302	86	7.396	636.056	9'274	4'414
37	1.369	50.653	6'083	3'332	87	7.569	658.503	9'327	4'431
38	1.444	54.872	6'164	3'362	88	7.744	681.472	9'381	4'448
39	1.521	59.319	6'245	3'391	89	7.921	704.969	9'434	4'465
40	1.600	64.000	6'325	3'420	90	8.100	729.000	9'487	4'481
41	1.681	68.921	6'403	3'448	91	8.281	753.571	9'539	4'498
42	1.764	74.088	6'481	3'476	92	8.464	778.688	9'592	4'514
43	1.849	79.507	6'557	3'503	93	8.649	804.357	9'644	4'531
44	1.936	85.184	6'633	3'530	94	8.836	830.584	9'695	4'547
45	2.025	91.125	6'708	3'557	95	9.025	857.375	9'747	4'563
46	2.116	97.336	6'782	3'583	96	9.216	884.736	9'798	4'579
47	2.209	103.823	6'856	3'609	97	9.409	912.673	9'849	4'595
48	2.304	110.592	6'928	3'634	98	9.604	941.192	9'899	4'610
49	2.401	117.649	7'000	3'659	99	9.801	970.299	9'950	4'626
50	2.500	125.000	7'071	3'684	100	10.000	1.000.000	10'000	4'642

FORMULARIO

ÁLGEBRA

Divisibilidad de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$

1. $(x^m - a^m) : (x - a)$; $R = a^m - a^m = 0$ ..... *divisible*

2. $(x^m + a^m) : (x - a)$; $R = a^m + a^m = 2\,a^m$ ..... *indivisible*

3. $(x^m - a^m) : (x + a)$; $R = (-a)^m - a^m$
$= 0$, si m es par ..... *divisible*
$= -2\,a^m$, si m es impar, *indivisible*

4. $(x^m + a^m) : (x + a)$; $R = (-a)^m + a^m$
$= 2\,a^m$, si m es par ..... *indivisible*
$= 0$, si m es impar ..... *divisible*

Potencias y radicales

5. $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

6. $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

7. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

8. $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$

9. $(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$

10. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

11. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

12. Producto de potencias de igual base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

13. Cociente de potencias de igual base:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

14. Potencia de otra potencia:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

15. Potencia de una fracción:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{a^m}$$

16. Potencias de exponente *cero*:

$$\left.\begin{array}{l} a^m : a^m = a^0 \\ \dfrac{a^m}{a^m} = 1 \end{array}\right\} \quad a^0 = 1$$

17. Potencias de exponente *negativo*:

$$\left.\begin{array}{l} a^m : a^{m+n} = a^{-n} \\ \dfrac{a^m}{a^{m+n}} = \dfrac{1}{a^n} \end{array}\right\} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

18. Potencias de exponente *fraccionario*:

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} \quad \therefore \quad a^{\frac{12}{4}} = \sqrt[4]{a^{12}}$$

Cuando el exponente m *de* a *no es divisible por el índice* n, *la expresión* $a^{\frac{m}{n}}$ *no tiene sentido; sin embargo se ha* CONVENIDO *en que la notación* $a^{\frac{m}{n}}$ *exprese, aún en este caso, el radical* $\sqrt[n]{a^m}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

19. Operaciones con potencias de exponente cero, negativo o fraccionario. — *Se siguen las mismas reglas que para las potencias de exponente entero positivo.* Así,

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = a^{(-5)+(-3)} = a^{-8}$$

$$3\,x^{-4} : x^{-4} = 3\,x^0 = 3$$

$$(x^{-5})^{-2} = x^{(-5)\cdot(-2)} = x^{10}$$

$$\left(2^3 \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{-\frac{5}{9}}$$

$$x^{-2} : x^{\frac{2}{3}} = x^{-2-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{8}{3}}$$

$$\left[(a^{-3})^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{4}} = a^{(-3)\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = a^{\frac{1}{2}}$$

20. Producto de radicales del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$$

21. Sacar un factor de un radical:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

22. Introducir un factor:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

23. Cociente de radicales del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

24. Potencia de un radical:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

25. Raíz de un radical:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

26. Raíces sucesivas:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

27. Propiedad fundamental.—*No cambia el valor de un radical cuando se multiplica, o divide, el índice de la raíz y los exponentes del radicando por el mismo número.*

$$\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[pn]{a^{qn}}$$

$$\sqrt[3]{2\,a^2(x+y)} = \sqrt[6]{2^2 a^4 (x+y)^2}$$

28. Simplificación de radicales. — *Un radical estará expresado en su forma más sencilla cuando:*

1.° *El índice del radical y los exponentes del radicando no tengan ningún divisor común.*

2.° *El radicando no contenga factores con exponentes iguales o mayores que el índice.*

3.° *No haya denominadores en el radicando.*

EJEMPLOS:

$$\sqrt[12]{a^4 b^8} = \sqrt[3]{ab^2}$$

$$\sqrt{27\,a^3} = 3\,a\sqrt{3\,a}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7\,a}} = \sqrt{\frac{5}{7\,a} \cdot \frac{7\,a}{7\,a}} = \frac{1}{7\,a}\sqrt{35\,a}$$

29. Radicales semejantes. — *Después de simplificados, han de tener el mismo índice y la misma cantidad subradical.*

30. Suma y diferencia de radicales. — 1.° *Si son semejantes, se separa el radical como factor común de los coeficientes.*

2.° *Si no son semejantes, se dejan indicadas las operaciones.*

31. Reducción de radicales al mismo índice. *Se halla el* m. c. m. *de los índices, y éste será el índice común. Después se multiplican los exponentes de cada radicando por el cociente de dividir el índice común por el índice respectivo.*

32. Multiplicación de radicales. — *Después de reducirlos a común índice, se efectúa el producto de las cantidades subradicales.*

33. División de radicales. — *Después de reducirlos a común índice, se dividen las cantidades subradicales.*

34. Racionalización de denominadores. *Consiste en hacer desaparecer los radicales del denominador de una fracción.*

Se consigue, multiplicando a los dos términos de la fracción por la expresión que haga al denominador potencia perfecta del mismo orden que el índice de la raíz.

Ecuación de segundo grado

35. Forma completa:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1,\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ = discriminante

36. Formas incompletas:

1.ª $ax^2 + c = 0$

$$x_1,\ x_2 = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

2.ª $ax^2 + bx = 0$

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

3.ª $ax^2 = 0$

$$x_1 = x_2 = 0$$

37. Suma y producto de las raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Trinomio de segundo grado

38. Forma general:

$$ax^2 + bx + c = y$$

39. Ceros del trinomio: Son las raíces x', x'' de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

40. Signo del trinomio:

1) Si x' y x'' son reales y desiguales, todos los valores reales de x, positivos o negativos, mayores o menores que las raíces dan al trinomio el mismo signo que tenga a.

2) Para valores reales de x, comprendidos entre las dos raíces, el trinomio adquiere valores de signo contrario al de a.

41. Valor *mínimo* y valor *máximo:* Si a es positivo, el trinomio adquiere su valor mínimo cuando

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si a es negativo, el trinomio adquiere su valor máximo cuando

$$x = \frac{-b}{2a}$$

GEOMETRÍA

Área de los poliedros regulares

42. Tetraedro: $A = a^2\sqrt{3}$

43. Octaedro: $A = 2a^2\sqrt{3}$

44. Icosaedro: $A = 5a^2\sqrt{3}$

45. Hexaedro: $A = 6a^2$

46. Dodecaedro:

$$A = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

Área y volumen de los sólidos no esféricos

47. Prisma:

$$A_l = p \cdot a$$
$$A_t = p \cdot a + 2B$$
$$V = B \cdot h$$

48. Pirámide:

$$A_l = \frac{p \cdot a}{2}$$

$$A_t = \frac{p \cdot a}{2} + B$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

49. Cilindro:

$$A_l = 2\pi r \cdot h$$
$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

50. Cono:

$$A_l = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r \cdot g$$
$$A_t = \pi r g + \pi r^2 = \pi r\,(g + r)$$
$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

51. Tronco de pirámide:

$$A_l = \frac{(p+p')\,a}{2}$$

$$A_t = \frac{(p+p')\,a}{2} + B + B'$$

$$V = \frac{h\,(B+B'+\sqrt{B\cdot B'})}{3}$$

52. Tronco de cono:

$$A_l = \frac{(2\pi R + 2\pi r)\,g}{2} = \pi\,(R+r)\,g$$

o, también, por ser $R + r = 2\,r_m$

$$A'_l = 2\,\pi\,r_m \cdot g$$

$$A_t = \pi\,(R+r)\,g + \pi\,R^2 + \pi\,r^2$$

$$V = \frac{h\,\pi\,(R^2+r^2+Rr)}{3}$$

Área de sólidos esféricos

53. TEOREMA FUNDAMENTAL. — *El área de la superficie engendrada por un segmento que gira en torno a un eje coplanario, que no le atraviesa, es igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio igual a la normal del segmento, por la proyección del mismo segmento sobre el eje.*

54. Zona y casquete esférico *(engendrados por un arco de circunferencia):*

$$A = 2\,\pi\,r \cdot h$$

55. Superficie esférica *(engendrada por una semicircunferencia):*

$$A = 2\,\pi\,r \cdot 2\,r = 4\,\pi\,r^2$$

56. Huso esférico *(superficie esférica limitada por dos planos que pasan por el centro y forman un diedro de* n *grados):*

$$A = \frac{4\,\pi\,r^2 \cdot n}{360^\circ} = \frac{\pi\,r^2 \cdot n}{90^\circ}$$

Volumen de los sólidos esféricos

57. TEOREMA FUNDAMENTAL. — *El volumen engendrado por un triángulo al girar en torno a un eje coplanario que no le atraviesa y sobre el cual apoya un vértice, es igual al tercio de la altura correspondiente a dicho vértice, por el área engendrada por el lado opuesto.*

58. Sector esférico *(engendrado por un sector circular):*

$$V = 2\,\pi\,r\,h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\,\pi\,r^2 h$$

59. Esfera *(engendrada por un semicírculo):*

$$V = 4\,\pi\,r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

60. Cuña esférica *(parte de esfera limitada por dos planos que pasan por el centro y forman un diedro de* n *grados):*

$$V = \frac{4\,\pi\,r^3 \cdot n}{3 \cdot 360^\circ} = \frac{\pi\,r^3 \cdot n}{270^\circ}$$

Algunos números de uso frecuente

$\sqrt{2} = 1'414214$	$\pi = 3'141593$
$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0'707107$	$\frac{\pi}{2} = 1'570796$
$2\sqrt{2} = 2'828427$	$2\,\pi = 6'283185$
$\sqrt{3} = 1'732051$	$\frac{1}{\pi} = 0'318310$
$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0'866025$	$\sqrt{\pi} = 1'772454$
$2\sqrt{3} = 3'464102$	$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0'564190$
$3\sqrt{3} = 5'196153$	$\pi^2 = 9'869604$

ÍNDICE

ÁLGEBRA

1. Operaciones racionales con expresiones enteras 5
2. Descomposición factorial de polinomios 16
3. Fracciones algebraicas 25
4. Operaciones con fracciones algebraicas 34
5. Radicales 40
6. Operaciones con radicales 47
7. Potenciación de exponente racional 55
8. Ecuación de segundo grado o cuadráticas 63
9. Propiedades de las raíces 70
10. Trinomio de segundo grado 77
11. Ecuaciones y sistemas reducibles a ecuaciones cuadráticas 83

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

12. El plano 98
13. Perpendicularidad de recta y plano 103
14. Paralelismo 107
15. Ángulo diedro 116
16. Distancias y ángulos 125
17. Simetrías 132
18. Ángulos poliedros 138
19. Poliedros regulares 148
20. Estudio de los prismas 152
21. Estudio de las pirámides 161
22. Cilindros y conos de revolución 169
23. Áreas del cilindro y cono de revolución 175
24. La esfera 181
25. Áreas de figuras esféricas 190
26. Volúmenes de prismas y cilindros 196
27. Volúmenes de pirámides y conos 202
28. Volúmenes de figuras esféricas 208
29. Secciones cónicas 214
30. Movimientos de la Tierra 222

TABLA DE CUADRADOS, CUBOS Y RAÍCES 233

FORMULARIO 234